Préparer l'année en ECS1

Ce document regroupe le programme de Seconde, Première et Terminale nécessaire en début d'année en ECS1, ainsi que des exercices de révisions associés.
On s'entrainera **sans calculatrice**.
Le devoir du 7 septembre portera sur des exercices type bac (mais toujours sans calculatrice).
Le **corrigé** *des exercices ci-dessous sera en ligne la semaine précédant la rentrée.* Pour toute question, vous pouvez me contacter à l'adresse `cecile.lerudulier@gmail.com`

Bon courage.

1 Résolution d'équations et d'inéquations

1. **Équations**
   - ☐ Résolution d'équations du premier degré : $ax+b=cx+d$
   - ☐ Résolution d'équations du second degré : $ax^2+bx+c=0$, discriminant.
   - ☐ Factorisation. Identités remarquables. Équations-produit
   - ☐ Mise au même dénominateur. Équations-quotient.
   - ☐ Résolution d'équations usuelles :
   $$\frac{1}{x}=a, \qquad x^2=a, \qquad ,\sqrt{bx+c}=a, \qquad e^x=a, \qquad \ln(x)=a$$
2. **Inéquation**
   - ☐ Signe de $ax+b$
   - ☐ Signe de ax^2+bx+c
   - ☐ Tableau de signe d'un produit ou d'un quotient.
   - ☐ Résolution d'une inéquation par factorisation ou mise au même dénominateur.
   - ☐ Résolution d'inéquations usuelles (le signe $\leqslant$ peut être remplacé par $\geqslant, >$ ou $<$) :
   $$\frac{1}{x}\leqslant a, \qquad x^2\leqslant a, \qquad \sqrt{bx+c}\leqslant a, \qquad e^x\leqslant a, \qquad \ln(x)\leqslant a$$

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $3x-4=8$
(b) $2x^2+4x-1=0$
(c) $x^2=9$
(d) $\ln(x)=4$
(e) $e^x=1$
(f) $e^x=0$
(g) $\dfrac{2x+1}{x+3}=\dfrac{x+1}{2x-1}$
(h) $\sqrt{x-4}=5$
(i) $\cos(t)=\dfrac{1}{2}$ sur $[0,2\pi]$.

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $x-3\leqslant 2x+1$
(b) $3-x^2\geqslant 2x$
(c) $x^2\leqslant 9$; $x^2>9$
(d) $\ln(x)>1$
(e) $e^x<4$
(f) $\dfrac{2x+1}{x+3}<\dfrac{x+1}{2x-1}$
(g) $\sqrt{5-x}\leqslant 2$
(h) $\ln(x+1)-\ln(2-x)\leqslant 0$

2 Étude de fonctions – Fonctions de référence – Primitives

1. **Notion de fonction**
   - ☐ Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction simple (recherche des valeurs interdites)
   - ☐ Vocabulaire image et antécédent. Lecture graphique d'images et d'antécédents.
   - ☐ Construire un tableau de valeurs (calculs d'images).
   - ☐ Déterminer les éventuels antécédents d'un nombre a par f (resolution de $f(x) = a$).
   - ☐ Courbe représentative d'une fonction.
   - ☐ Notion de continuité.
2. **Fonctions usuelles**
   Pour toutes les fonctions usuelles, il faut connaître l'allure de la courbe, les variations, les limites, le signe.
   - ☐ Fonctions affines et linéaires
   - ☐ Fonction $x \mapsto x^2$. Fonctions du second degré
   - ☐ Fonction inverse, racine carrée.
   - ☐ Fonctions ln, exp. Règles de calcul.
   - ☐ Fonctions cos, sin. Cercle trigonométrique. Périodicité.
3. **Limites**
   - ☐ Limites des fonctions usuelles, tableau des opérations sur les limites. Composée de limites.
   - ☐ Croissances comparées.
   - ☐ Lever une indétermination.
   - ☐ Appliquer le théorème d'encadrement (théorème des gendarmes).
4. **Variations**
   - ☐ Variations des fonctions usuelles
   - ☐ Dérivabilité. Taux d'accroissement.
   - ☐ Calculer une dérivée.
   - ☐ Dériver une fonction composée du type $x \mapsto u(ax+b)$
   - ☐ Étudier le signe de la dérivée et contruire le tableau de variation.
   - ☐ Donner les extrema d'une fonction connaissant son tableau de variation.
   - ☐ Résolution approchée d'équations du type $f(x) = a$ par application du théorème des valeurs intermédiaires ou du théorème de la bijection (nom du théorème dans le cas où la fonction est strictement monotone).
5. **Propriétés du graphe**
   - ☐ Équation d'une tangente.
   - ☐ Interprétation graphique du nombre dérivé.
   - ☐ Asymptote horizontale, verticale.
   - ☐ Position relative de deux courbes (étude du signe de $f(x) - g(x)$).
6. **Primitives et intégrales**
   - ☐ Définition.
   - ☐ Primitives des fonctions usuelles.
   - ☐ Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.

Exercice 3 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \ln(3x^2 + \mathrm{e}^x)$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^4+6}$.
3. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sqrt{3x+1}$.
4. $f : x \mapsto \cos^2(x)$.
5. $f : x \mapsto \sin(5x-1)$.

Exercice 4 On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

1. Étudier les limites de f en 0 et $+\infty$.
2. Pour tout $x > 0$, calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$. Dresser le tableau de variation de f.
4. En dédurie que f admet un minimum sur $]0,+\infty[$ que l'on précisera.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
6. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha \in]0,+\infty[$. Montrer ensuite que α appartient à $[1,\mathrm{e}]$.
7. Tracer l'allure de la courbe de f.

Exercice 5 On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
   En déduire les variations de f.
2. Dresser le tableau de signe de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$ pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. En déduire le tableau de signe de $f(x)$.
3. Déterminer les limites de f en $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ (on s'aidera des tableaux de signes de sin et cos précédents). La courbe de f admet-elle des asymptotes?
4. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 0. Étudier la position relation de $\mathscr{C}_f$ et de T (on pourra étudier une fonction auxiliaire).
5. En déduire l'allure de la courbe de f.

Exercice 6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale (à préciser) en $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f.
4. Déterminer les antécédents de 0 par f.
5. Déterminer les antécédents de $\dfrac{1}{2}$ par f.

Exercice 7 Justifier que $F : x \mapsto (x^2-2x+2)\,\mathrm{e}^x$ est une primitive de $f : x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,\quad \int_{-2}^1 \frac{t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t,\quad \int_0^4 u\,\mathrm{e}^{u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

3 Suites réelles

1. **Notion de suite**
   - ☐ Vocabulaire : Terme de rang n. Suites définies de manière explicite, par récurrence.
   - ☐ Suites majorées, minorées, bornées
   - ☐ Étudier la monotonie d'une suite.
   - ☐ Calculer la limite d'une suite explicite.
   - ☐ Réaliser une démonstration par récurrence.
   - ☐ Théorème de convergence monotone.
2. **Suites usuelles**
   - ☐ Suites arithmétiques
   - ☐ Suites géométriques. Limite de $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - ☐ Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

Exercice 9

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison 3 et et premier terme $u_0 = 2$. Donner u_n en fonction de n.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison 3 et et premier terme $v_1 = 2$. Donner v_n en fonction de n.
   Calculer $\sum_{k=1}^{5} v_k = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5$ à l'aide de la formule du cours.

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 2$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 1$.

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3. Calculer son premier terme.
2. En déduire le terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer alors le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5}{6 - u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 4$.
2. Dresser le tableau de signe de $\dfrac{5}{6-x} - x$.
3. En utilisant les deux questions précédentes, étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel ℓ qui vérifie $1 \leqslant \ell \leqslant 4$ et $\ell = \dfrac{5}{6-\ell}$.
5. Calculer ℓ.

4 Nombres complexes

- ☐ Forme algébrique d'un nombre complexe.
- ☐ Équations du second degré à coefficients réels.
- ☐ Module et argument d'un nombre complexe non nul.
- ☐ Formes trigonométrique et exponentielle.

Exercice 12

1. Écrire sous forme alégbrique $\dfrac{2-6i}{1+2i}$ et $\left(\dfrac{1+i}{i}\right)^3$.
2. Donner le module et un argument de $\left(\dfrac{1+i}{i}\right)^3$ et de $\sqrt{3}+i$.

Exercice 13
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $2x^2-3x+1=0$, $\quad x^2+3x+9=0$, $\quad x^2=-1$.

5 Algorithmique

1. **Instruction conditionnelle SI**
   - ☐ **Si** condition **alors** instructions
   - ☐ **Si** condition **alors** instructions
     Sinon instructions
2. **Boucles**
   - ☐ Boucle **Pour**
   - ☐ Boucle **Tant que**
3. Comprendre un algorithme.
4. Savoir compléter un algorithme.

Exercice 14 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}1-2x & \text{si } x<1\\ 4x+2 & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$$

Compléter l'algorithme suivant pour qu'il demande à l'utilisateur une valeur de x et affiche la valeur de $y=f(x)$.

```
Demander x
Si ............ alors
    y prend la valeur ...........
Sinon
    y prend la valeur ...........
Fin Si
Afficher y
```

Exercice 15 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=u_n\exp(-u_n)\end{cases}$$

1. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il demande à l'utilisateur une valeur de $n\in\mathbb{N}$ et affiche la valeur de u_n.

```
Demander un entier naturel n
u prend la valeur 2
Pour  k allant de ... à ....
    u prend la valeur ...........
Fin Pour
Afficher u
```

2. Que fait cet algorithme ?

```
n prend la valeur 0
u prend la valeur 2
Tant que u > 0.001
    n prend la valeur n+1
    u prend la valeur u*exp(-u)
Fin Tant que
Afficher n
```