PRÉPARER L'ANNÉE EN ECS1 – CORRIGÉ

Si vous pensez avoir remarqué une erreur, ou pour toute question : envoyez-moi un mail à `cecile.lerudulier@gmail.com`

Exercice 1 (a) L'ensemble des solutions est $\{4\}$.

(b) L'ensemble des solutions est $\left\{-1-\frac{\sqrt{6}}{2}\ ;\ -1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$.

(c) L'ensemble des solutions est $\{-3\ ;\ 3\}$.

(d) L'ensemble des solutions est $\{e^4\}$.

(e) L'ensemble des solutions est $\{0\}$.

(f) L'ensemble des solutions est $\varnothing$.

(g) $\dfrac{2x+1}{x+3} = \dfrac{x+1}{2x-1}$.
Les fonctions $x \mapsto 2x+1$, $x \mapsto x+3$, $x \mapsto x+1$,$x \mapsto 2x-1$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Par quotient, l'équation ci-dessus est définie pour tout réel x tel que $x+3 \neq 0$ et $2x-1 \neq 0$. L'ensemble de définition est donc $\mathbb{R}\setminus\{-3\ ;\ \frac{1}{2}\}$.
Soit donc $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\ ;\ \frac{1}{2}\}$.

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x+3} = \frac{x+1}{2x-1} &\Leftrightarrow (2x+1)(2x-1) = (x+1)(x+3)\\ &\Leftrightarrow 4x^2-1 = x^2+4x+3\\ &\Leftrightarrow 3x^2-4x-4=0\end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 16+16\times 3 = 16\times 4 = 8^2$. L'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{2}{3}\ ;\ 2\right\}$ (en vérifiant bien que ce ne sont pas des valeurs interdites).

(h) $\sqrt{x-4} = 5$.

La fonction $x \mapsto x-1$ est définie sur $\mathbb{R}$, mais la racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$. L'équation ci-dessus est définie pour tout réel x tel que $x-4 \geqslant 0$. L'ensemble de définition est donc $[4,+\infty[$.

Soit donc $x \geqslant 4$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x-4} = 5 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-4}\right)^2 = 5^2 \qquad \text{car les deux membres sont positifs}\\ &\Leftrightarrow x-4 = 25\\ &\Leftrightarrow x = 29\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\{29\}$ (on a vérifié que 29 est bien dans l'ensemble de définition).

(i) $\cos(t) = \dfrac{1}{2}$ sur $[0,2\pi]$.

On résout cette équation par lecture du cercle trigonométrique. Ce sont des angles usuels. L'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{5\pi}{3}\right\}$.

Exercice 2 (a) L'ensemble des solutions est $[-4,+\infty[$.

(b) L'ensemble des solutions est $[-3\ ;\ 1]$.

(c) L'ensemble des solutions est $[-3\ ;\ 3]$.
L'ensemble des solutions est $]-\infty\ ;-3[\cup]3\ ;\ +\infty[$.

(d) L'ensemble des solutions est $]\,e\ ;\ +\infty[$.

(e) L'ensemble des solutions est $]-\infty\ ;\ \ln(4)[$.

(f) $\dfrac{2x+1}{x+3} < \dfrac{x+1}{2x-1}$

L'ensemble de définition est (comme à l'exercice 1) $\mathbb{R}\setminus\{-3\ ;\ \frac{1}{2}\}$.
Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\ ;\ \frac{1}{2}\}$. Par de produit en croix ici, car le signe des termes varie.

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x+3} < \frac{x+1}{2x-1} &\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+3} - \frac{x+1}{2x-1} < 0\\ &\Leftrightarrow \frac{(2x+1)(2x-1)-(x+1)(x+3)}{(x+3)(2x-1)} < 0\\ &\Leftrightarrow \frac{3x^2-4x-4}{(x+3)(2x-1)} < 0\end{aligned}$$

On realise alors un tableau de signe.
L'ensemble des solutions est $]-3;-\frac{2}{3}[\cup]\frac{1}{2};2[$.

(g) $\sqrt{5-x} \leqslant 2$

La fonction $x \mapsto 5-x$ est définie sur $\mathbb{R}$, mais la racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$. L'équation ci-dessus est définie pour tout réel x tel que $5-x \geqslant 0$. L'ensemble de définition est donc $]-\infty, 5]$.
Soit donc $x \leqslant 5$.

$$\begin{aligned} \sqrt{5-x} \leqslant 2 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{5-x}\right)^2 \leqslant 2^2 \qquad \text{car les deux membres sont positifs}^{\star}. \\ &\Leftrightarrow 5-x \leqslant 4 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $[1;5]$.
* Plus précisément, car la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(h) $\ln(x+1) - \ln(2-x) \leqslant 0$

Les fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto 2-x$ sont définies sur $\mathbb{R}$, mais ln est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$. L'équation ci-dessus est définie pour tout réel x tel que $x+1>0$ et $2-x>0$. L'ensemble de définition est donc $]-1;2[$.
Soit donc $x \in]-1;2[$.

$$\begin{aligned} \ln(x+1) - \ln(2-x) \leqslant 0 &\Leftrightarrow \ln(x+1) \leqslant \ln(2-x) \\ &\Leftrightarrow x+1 \leqslant 2-x \qquad \text{par stricte croissance de ln} \\ &\Leftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $[-1;\frac{1}{2}]$.

Exercice 3

1. $f'(x) = \dfrac{6x+e^x}{3x^2+e^x}$.
2. $f'(x) = \dfrac{12x-2x^5}{(x^4+6)^2}$.
3. $f'(x) = -e^{-x}\sqrt{3x+1} + e^{-x}\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.
4. $f'(x) = -2\sin(x)\cos(x)$.
5. $f'(x) = 5\cos(5x-1)$.

Exercice 4 On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

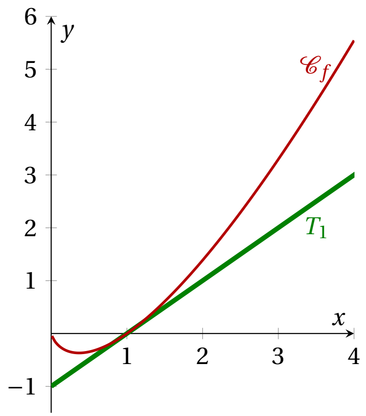
1. Par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$.
2. Pour tout $x>0$, $f'(x) = \ln(x)+1$.
3. Soit $x>0$.
$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x)+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant e^{-1}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| 0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Le minimum de f est $-\dfrac{1}{e}$ (atteint en $\dfrac{1}{e}$).
5. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 admet pour équation
$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
Or $f'(1) = 1$ et $f(1) = 0$. Donc l'équation de la tangente est
$$y = x-1$$

6. Sur $]0;\frac{1}{\mathrm{e}}]$, $f(x)<0$ donc l'équation $f(x)=2$ n'a pas de solution.
Sur l'intervalle $[\frac{1}{\mathrm{e}};+\infty[$, f est continue (produit de deux fonctions usuelles continues) et strictement croissante. De plus, $f(\frac{1}{\mathrm{e}})=-\frac{1}{\mathrm{e}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x)=+\infty$: on a bien $2\in[-\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty[$. D'après le théorème de la bijection l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution $\alpha\in[\frac{1}{\mathrm{e}};+\infty[$, donc on a bien une unique solution dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

   De plus, $f(1)=0\leqslant 2$ et $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}\geqslant 2$ (il faut savoir que e est entre 2 et 3, c'est généralement suffisant). On a : $f(1)\leqslant f(\alpha)\leqslant f(\mathrm{e})$, donc $1\leqslant\alpha\leqslant\mathrm{e}$ car f est strictement croissante sur $[\frac{1}{\mathrm{e}};+\infty[$.

7. 

Exercice 5 On considère la fonction $f:\begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$.

1. Soit $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$,
$$f'(x)=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}$$
On en déduit que $f'(x)>0$ pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc f est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	0	$+$		$+$	0
$\sin(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$

3. $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+}\cos(x)=0^+$ et $\sin(-\frac{\pi}{2})=-1<0$, donc par quotient, $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} f(x)=-\infty$.
$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\cos(x)=0^+$ et $\sin(\frac{\pi}{2})=1>0$, donc par quotient, $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x)=+\infty$.
La courbe de f admet deux asymptotes verticales, d'équations $x=-\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{\pi}{2}$.

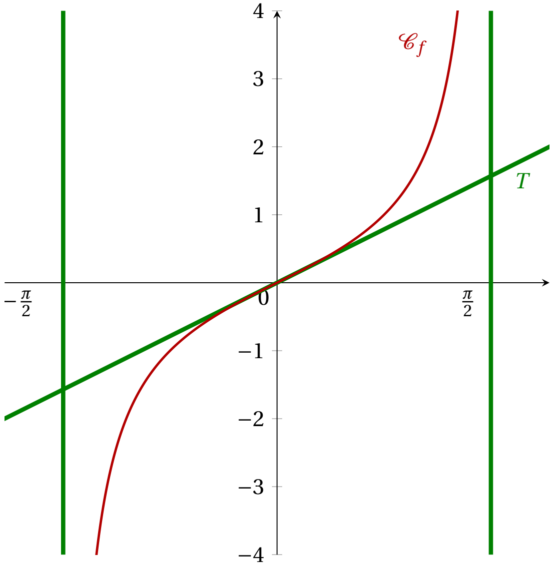
4. La tangente T a pour équation $y=f'(0)x+f(0)$. Or $f'(0)=1$ et $f(0)=0$. T a donc pour équation $y=x$.

   La position relation de $\mathscr{C}_f$ et de T est donnée par le signe de $f(x)-x$. Notons $g:x\mapsto f(x)-x$. On a : $g'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}-1=\dfrac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\leqslant 0$ car $0<\cos^2(x)\leqslant 1$.
La fonction g est donc décroissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. Or $g(0)=0$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
g	$\Vert$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\Vert$
$g(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$

   Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$, T est en dessous de $\mathscr{C}_f$ et sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, T est au dessus de $\mathscr{C}_f$. Les deux courbes se coupent au point de coordonnées $(0,0)$.

5.



Exercice 6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
La fonction f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 1$. Remarquons qu'elle admet aussi une asymptote en $-\infty$ d'équation $y = -1$.

3. Soit x un réel.
$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0$$
La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (*Tableau non demandé, inutile de le faire quand la réponse est simple.*)

4. Les antécédents de 0 par f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Résolvons cette équation.
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x}-1 = 0 \qquad \text{(pas de valeur interdite)} \\ &\Leftrightarrow e^{2x} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$
Ceci justifie que 0 admet un unique antécédent par f qui vaut 0.

Autre méthode : si on devine par avance que 0 est (une) solution, voici comment justifier que c'est bien la seule, sans calcul : f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $0 \in]-1,1[$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Or, $f(0) = 0$ donc 0 est une solution. Par conséquent c'est la seule solution et donc le seul antécédent de 0 par f.

5. Les antécédents de $\frac{1}{2}$ par f sont les solutions de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$. Résolvons cette équation.
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow e^{2x}-1 = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2x} = \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow e^{2x} = 3 \\ &\Leftrightarrow 2x = \ln(3) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln(3)}{2} \end{aligned}$$
Ceci justifie que $\frac{1}{2}$ admet un unique antécédent par f qui vaut $\dfrac{\ln(3)}{2}$.

Exercice 7 On calcule $F'(x)$ et on remarque que $F'(x) = f(x)$.

Exercice 8 Pour calculer les intégrales, il faut déterminer une primitive de chacune des fonctions à intégrer.

1. La fonction est de la forme $u'u^2$, avec $u(x) = \sin(x)$.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\sin^3(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$
2. La fonction est de la forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+1$.
$$\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(|x^2+1|)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\ln(5)$$
3. La fonction est de la forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(t) = t^2+1$.
$$\int_{-2}^1 \frac{t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1}\right]_{-2}^1 = -\frac{3}{20}$$
4. La fonction est de la forme $f'\exp(f)$ avec $f(u) = u^2/2$.
$$\int_0^4 u\,\mathrm{e}^{u^2/2}\,\mathrm{d}u = \left[\mathrm{e}^{u^2/2}\right]_0^4 = \mathrm{e}^8 - 1$$

Exercice 9

1. $u_n = 2+3n$
2. $u_n = 2\times 3^{n-1}$.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{5} v_k = v_1\frac{1-3^5}{1-3} = 3^5-1 = 242.$

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n+2$ et $u_0 = 2$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = u_n+1$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrons que $v_{n+1} = 3v_n$.
$$v_{n+1} = u_{n+1}+1 = 3u_n+2+1 = 3(u_n+1) = 3v_n$$
Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0+1 = 3$.
2. D'après le cours, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $v_n = 3\times 3^n = 3^{n+1}$.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = v_n - 1 = 3^{n+1}-1$.
4. Puisque $3>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^{n+1} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 11 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = 4$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5}{6-u_n}$.

1. Démontrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1\leqslant u_n\leqslant 4$.

   Initialisation : $u_0 = 4$ donc on a bien $1\leqslant u_0\leqslant 4$. La propriété est vraie pour $n=0$.

   Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $1\leqslant u_n\leqslant 4$. On a alors $-4\leqslant -u_n\leqslant -1$, donc $2\leqslant 6-u_n\leqslant 5$. Par passage à l'inverse avec des nombres strictement positifs, on obtient $\dfrac{1}{5}\leqslant\dfrac{1}{6-u_n}\leqslant\dfrac{1}{2}$ et enfin, $1\leqslant\dfrac{5}{6-u_n}\leqslant\dfrac{5}{2}$. On a donc montré que $1\leqslant u_{n+1}\leqslant\dfrac{5}{2}\leqslant 4$. La propriété est bien héréditaire.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1\leqslant u_n\leqslant 4$.

2. Soit $6\in\mathbb{R}\setminus\{6\}$.
$$\frac{5}{6-x} - x = \frac{5-x(6-x)}{6-x} = \frac{x^2-6x+5}{6-x}$$
Le discriminant du numérateur est $\Delta = 16$ et les racines sont 1 et 5.

Le tableau de signe est le suivant (d'après les règles du signe d'un quotient)

x	$-\infty$		1		5		6		$+\infty$
x^2-6x+5		+	0	−	0	+		+	
$6-x$		+		+		+	0	−	
$\frac{5}{6-x}-x=\frac{x^2-6x+5}{6-x}$		+	0	−	0	+	||	−	

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Étudions le signe de $u_{n+1}-u_n$.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5}{6-u_n}-u_n$$

Or, en prenant $x=u_n$ dans le tableau précédent, et sachant que $u_n\in[1,4]$, on voit que $\frac{5}{6-u_n}-u_n\leqslant 0$. Ainsi, $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$ pour tout entier n et la suite $(u_n)_{n\in N}$ est décroissante.

4. La suite $(u_n)_{n\in N}$ est décroissante et minorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ.

   Puisque, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1\leqslant u_n\leqslant 4$, on a , par passage à la limite $1\leqslant\ell\leqslant 4$.

   Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{5}{6-u_n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{6-u_n}=\frac{5}{6-\ell}$ car $\ell\neq 6$. Par uncité de la limite, $\ell=\frac{5}{6-\ell}$.

5. On sait que $\ell=\frac{5}{6-\ell}$. Donc $\ell(6-\ell)=5$ et donc $\ell^2-6\ell+5=0$. On a déjà résolu cette équation, les solutions sont 1 et 5. Or, on sait de plus que $1\leqslant\ell\leqslant 4$. La seule possibilité est donc $\ell=1$.
   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Exercice 12

1. $\frac{2-6i}{1+2i}=\frac{(2-6i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=-2-2i.$
   $\left(\frac{1+i}{i}\right)^3=(-i+1)^3=-2-2i$

2. $\left(\frac{1+i}{i}\right)^3=-2-2i$ a pour module $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ et pour argument $-\frac{3\pi}{4}$.

   $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\,\mathrm{e}^{i\pi/6}$ a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 13

1. Les solutions sont 1 et $\frac{1}{2}$.
2. Les solutions sont $\frac{-3-3i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-3+3i\sqrt{3}}{2}$.
3. Les solutions sont i et $-i$ (j'espère que personne n'a calculé de discriminant ici!)

Exercice 14

```
Demander x
Si x>1 alors
    y prend la valeur 1-2*x
Sinon
    y prend la valeur 4*x+2
Fin Si
Afficher y
```

Exercice 15

1.

```
Demander un entier naturel n
u prend la valeur 2
Pour  k allant de 1 à n // 0 à n-1 fonctionne également
    u prend la valeur u*exp(-u)
Fin Pour
Afficher u
```

2. L'algorithme permet de déterminer et afficher le plus petit entier n tel que $u_n\leqslant 0.001$.