Calcul de dérivées

Exercice 1

1) $f'(x) = 2 \times 2x + 3 \times 4x^3 - 0$

$= 4x + 12x^3$

2) $f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + (-e^{-x})\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Rq : dérivée de $x \mapsto e^{ax} \rightsquigarrow a e^{ax}$ (ici $a = -1$)

3) $f'(x) = 8 \times \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{8}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{16 + \sqrt{x}}{2x}$ car $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$

4) $f'(x) = 3x^2 - 6 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 + \frac{6}{x^2}$

5) $f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Rq : dérivée de $x \mapsto x^a \rightsquigarrow a x^{a-1}$ avec a constante

(ici $a = \frac{3}{2}$)

6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2}$

Donc $f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-1/2 - 1} = -\frac{1}{2} x^{-3/2} = -\frac{1}{2x^{3/2}}$.

Exercice 2

1) $f(x) = x\ln(x) = u(x) \times v(x)$

avec $u(x) = x$ $\qquad v(x) = \ln(x)$

$u'(x) = 1$ $\qquad v'(x) = \frac{1}{x}$.

Donc

$$f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$
$$= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}$$
$$= \ln(x) + 1.$$

2) $f(x) = x^2 e^x = u(x) \times v(x)$

avec $u(x) = x^2$ $\qquad v(x) = e^x$

$u'(x) = 2x$ $\qquad v'(x) = e^x$

Donc

$$f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$
$$= 2x \times e^x + x^2 \times e^x$$
$$= 2x\,e^x + x^2\,e^x$$
$$= e^x\left(2x + x^2\right)$$

3) $f(x) = e^{3x}\left(\sqrt{x} + 2x\right) = u(x) \times v(x)$

avec $u(x) = e^{3x}$ $\qquad v(x) = \sqrt{x} + 2x$

$u'(x) = 3e^{3x}$ $\qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2$

Donc

$$f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$
$$= 3e^{3x}\left(\sqrt{x} + 2x\right) + e^{3x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\right)$$

Exercice 3

1) $$f(x) = \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec $u(x) = x^2+1$ $\qquad$ $v(x) = x-3$

$u'(x) = 2x$ $\qquad$ $v'(x) = 1$

Donc $$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v(x)^2}$$

$$= \frac{2x(x-3) - (x^2+1)\times 1}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - x^2 - 1}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 6x - 1}{(x-3)^2}$$

2) $$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec $u(x) = \ln(x)$ $\qquad$ $v(x) = x$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $v'(x) = 1$.

Donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v(x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)\times 1}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

3) $$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2+1} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec $u(x) = e^x + e^{-x}$ $\qquad$ $v(x) = x^2+1$

$u'(x) = e^x - e^{-x}$ $\qquad$ $v'(x) = 2x$

Donc $$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v(x)2}$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})(x^2+1) - (e^x + e^{-x})\times(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(x^2 - 2x + 1) - e^{-x}(x^2 + 2x + 1)}{(x^2+1)^2}$$

Exercice 6

1) $f(x) = e^{x^2} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$
$u'(x) = 2x$

Donc $f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)} = 2x e^{x^2}$

2) $f(x) = e^{1/x} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$

$u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Donc

$$f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)} = -\frac{1}{x^2} e^{1/x}.$$

3) $f(x) = \ln(3x+5) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 3x+5$
$u'(x) = 3$

Donc $$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{3}{3x+5}$$

4) $f(x) = \sqrt{e^x - 3x} = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = e^x - 3x$
$u'(x) = e^x - 3$

Donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

$$= \frac{e^x - 3}{2\sqrt{e^x - 3x}}$$

5) $f(x) = (e^{-2x} + 3x^2)^5 = u(x)^5$ avec $u(x) = e^{-2x} + 3x^2$

$u'(x) = -2e^{-2x} + 6x$

Donc
$$f'(x) = 5\, u'(x)\, u(x)^{5-1}$$
$$= 5(-2e^{-2x} + 6x)(e^{-2x} + 3x^2)^4$$

6) $f(x) = \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln(x)$

$u'(x) = \frac{1}{x}$

Donc $$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{1/x}{\ln(x)^2} = -\frac{1}{x \ln(x)^2}$$

Exercice 5

1) $$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) = \ln(u(x))$$

avec $$u(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{v(x)}{w(x)}$$

avec $v(x) = x^2+1$ $\quad$ $w(x) = x-1$

$v'(x) = 2x$ $\quad$ $w'(x) = 1$

Donc $$u'(x) = \frac{v'(x)\,w(x) - v(x)\,w'(x)}{w(x)^2}$$

$$= \frac{2x(x-1) - (x^2+1)\times 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

et donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$= \frac{\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}}{\frac{x^2+1}{x-1}}$$

$$= \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}$$

2) $f(x) = x\, e^{1-x^3} = u(x) \times v(x)$

avec $\quad u(x) = x \quad$ et $\quad v(x) = e^{1-x^3} = e^{w(x)}$

$\qquad u'(x) = 1$

$\qquad$ avec $\quad w(x) = 1 - x^3$

$\qquad\qquad w'(x) = -3x^2$

$\qquad$ donc $\quad v'(x) = w'(x)\, e^{w(x)}$

$\qquad\qquad = -3x^2\, e^{1-x^3}$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x) \\
&= 1 \times e^{1-x^3} + x \times \left(-3x^2\, e^{1-x^3}\right) \\
&= e^{1-x^3}\left(1 - 3x^3\right)
\end{aligned}
$$

3) $f(x) = \dfrac{x+3}{x\, e^{-x}} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ $\quad$ avec $\quad u(x) = x+3$

$\qquad u'(x) = 1$

et $\quad v(x) = x\, e^{-x}$

$\qquad = h(x) \times g(x)$

$\qquad$ avec $\quad h(x) = x \qquad g(x) = e^{-x}$

$\qquad\qquad h'(x) = 1 \qquad g'(x) = -e^{-x}$

Donc

$$
\begin{aligned}
v'(x) &= h'(x)\, g(x) + h(x)\, g'(x) \\
&= 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) \\
&= e^{-x}(1-x)
\end{aligned}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{v(x)^2} \\
&= \frac{1 \times e^{-x}(1-x) - (x+3) \times x e^{-x}}{(x e^{-x})^2} \\
&= \frac{e^{-x} - x e^{-x} - x^2 e^{-x} - 3x e^{-x}}{(x e^{-x})^2} \\
&= \frac{e^{-x}(1 - 4x - x^2)}{x^2 (e^{-x})^2} \\
&= \frac{1 - 4x - x^2}{x^2 e^{-x}}
\end{aligned}
$$