En vert : formules intuitives, non rigoureuses.
Ne pas écrire sur une copie ce type de formule

# Calculs de limites

## Exercice 1

1) $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 3x) = +\infty$ par somme.

« $+\infty + \infty = +\infty$ »

2) $\lim_{x \to 0} (3x+1) = 3 \times 0 + 1 = 1$

$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \to 0} -\ln(x) = +\infty$.

Par somme, $\lim_{x \to 0} \left( 3x+1 - \ln(x) \right) = +\infty$.

« $1 + (+\infty) = +\infty$ »

3) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

« $\frac{1}{0^+} = +\infty$ »

(ou alors, $\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et, avec $X = -x$, $\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, donc $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ )

Par somme, $\lim_{x \to -\infty} \left( e^x + e^{-x} \right) = +\infty$ donc $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$.

« $0 + (+\infty) = +\infty$ »  « $\frac{+\infty}{2} = +\infty$ »

4) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

« $\frac{1}{+\infty} = 0$ ».

Donc $\lim_{x \to +\infty} \left( e^x + e^{-x} \right) = +\infty$ puis $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$

« $+\infty + 0 = +\infty$ »  « $\frac{+\infty}{2} = +\infty$ ».

5) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ donc

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

« $\frac{0}{-\infty} = 0$ ». Ce n'est pas une F.I.

6) $\lim_{x \to 0^+} e^x = 1 > 0$ et $\lim_{x \to 0^+} x = 0^+$ donc

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

« $\frac{1}{0^+} = +\infty$ »

7) $\lim\limits_{x \to 1^+} e^x = e^1 = e > 0$

$\lim\limits_{x \to 1^+} (1-x) = 0^-$ car

on est ici, en $1^+$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

Donc $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{e^x}{1-x} = -\infty$

« $\dfrac{e}{0^-} = -\infty$ »

8) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x-1) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (x-1)\ln(x) = +\infty$

« $-1 \times (-\infty) = +\infty$ »

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)\ln(x) = +\infty$

« $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ »

10) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 3x) = 0^2 + 3 \times 0 = 0$.

Avec $X = x^2 + 3x$, $\lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$ donc par composée,

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x^2 + 3x) = -\infty$.

11) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x) = +\infty$ (second degré avec $a = 1 > 0$)

Avec $X = x^2 + 3x$, $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par

composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 + 3x) = +\infty$.

12) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et, avec $X = \dfrac{1}{x}$,

$\lim\limits_{X \to -\infty} \exp(X) = 0$, donc par composée, $\lim\limits_{x \to 0^-} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

## Exercice 2

1) On a une forme indéterminée (F.I.) « $+\infty - \infty$ ».

↳ on factorise par le terme dominant.

$$x^2 - 3x + 2 = x^2\left(1 - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right) = x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ « $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{2}{+\infty} = 0$ »

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 1$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc par produit

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 - 3x + 2\right) = +\infty$$

↳ « $+\infty \times 1 = +\infty$ ».

2) F. I. « $-\infty + \infty$ » car $-2x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -(-\infty) = +\infty$.

$$x - 2x^3 + 5 = x^3\left(\frac{x}{x^3} - 2 + \frac{5}{x^3}\right) = x^3\left(\frac{1}{x^2} - 2 + \frac{5}{x^3}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2} - 2 + \frac{5}{x^3}\right) = -2$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

Donc par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - 2x^3 + 5\right) = +\infty$

↳ « $-\infty \times (-2) = +\infty$ ».

3) Deux F.I. Au dénominateur « $+\infty - \infty$ » et si on la résout comme en 1) ou 2), on tombe sur « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

↳ On factorise numérateur et dénominateur par leur terme dominant respectif.

on simplifie les $x$

$$\frac{x^2 - 5}{3x - 2x^3 + 1} = \frac{x^2\left(1 - \frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(\frac{3}{x^2} - 2 + \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1 - \frac{5}{x^2}}{x\left(\frac{3}{x^2} - 2 + \frac{1}{x^3}\right)}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{5}{x^2}\right) = 1$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{x^2} - 2 + \frac{1}{x^3}\right) = -2$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{3}{x^2} - 2 + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$ ← « $-2\times(+\infty) = -\infty$ »

puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-5}{3x-2x^3+1} = 0$ ← « $\frac{1}{-\infty} = 0$ ».

4) Comme 3

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x}-x} = \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}-1\right)} = \frac{2+\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}$$

$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{x}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2+\frac{1}{x}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) = -1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x}-x} = \frac{2}{-1} = -2$.

5) FI « $+\infty - \infty$ »

$$\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ et, avec $X = 1+\frac{1}{x}$,

$\lim\limits_{X\to1} \ln(X) = \ln(1) = 0$ donc par composée,

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(x+1) - \ln(x)\right) = 0.$$

6) f.I « $+\infty - \infty$ » avec des racines carrées

↳ Utiliser la quantité conjuguée $a-b = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{a+b}$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} = \frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2 - \left(\sqrt{x+2}\right)^2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} = \frac{(x+3)-(x+2)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+3) = +\infty$ et , avec $X = x+3$ , $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

donc par composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+3} = +\infty$ .

De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$ .

« $+\infty + \infty = +\infty$ »

Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}\right) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}\right) = 0$

« $\frac{1}{+\infty} = 0$ ».

## Exercice 3

1) FI « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$$\frac{e^x}{1-x} = \frac{e^x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{e^x}{x} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissance comparée et

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$.

Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1-x} = +\infty$.

2) FI « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$$\frac{e^x}{\sqrt{x}} = \frac{e^x}{x^{1/2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \text{ par croissance comparée.}$$

3) FI « $0 \times \infty$ »

$$\begin{aligned} x\ln\left(x^2+2x\right) &= x\ln\left(x(x+2)\right) \\ &= x\left(\ln(x) + \ln(x+2)\right) \\ &= x\ln(x) + x\ln(x+2) \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+2) = \ln(2)$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x+2) = 0\times\ln(2) = 0$.

Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(x^2+2x\right) = 0$.

4) FI « $\infty \times 0$ »

$$(x^2-1)e^x = x^2e^x - e^x$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ par croissance comparée

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-1)e^x = 0$.

5) FI « $+\infty - \infty$ »

$$2x - \ln(x) + \underbrace{5x^3}_{\text{terme dominant ici}} = x^3\left(\frac{2}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^3} + 5\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0$ par croissance comparée.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - \ln(x) + 5x^3\right) = +\infty$

↳ « $+\infty \times (0 - 0 + 5)$ »

6) $$\frac{x+e^x}{x-e^x} = \frac{e^x\left(\frac{x}{e^x}+1\right)}{e^x\left(\frac{x}{e^x}-1\right)} = \frac{\frac{x}{e^x}+1}{\frac{x}{e^x}-1}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparée

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+e^x}{x-e^x} = -1$

↳ « $\frac{0+1}{0-1} = -1$ »