TD – PB1

Probabilités sur un univers fini

Applications directes du cours

ADC 1 Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules. Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules portant des numéros de même parité dans les cas suivants :

1. On tire les deux boules simultanément.
2. On tire une boule et on la remet avant de tirer la deuxième boule.

ADC 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue n tirages successifs et sans remise dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir n boules noires ? *On pourra commencer par traiter le cas* $n = 3$.

ADC 3 On dispose de trois urnes numérotées de 1 à 3. Pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$, l'urne numéro k contient k boules blanches et $(3 - k)$ boules noires.

1. On choisit une urne au hasard, on extrait une boule. Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?
2. On choisit une urne au hasard, on extrait une boule et on constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne 1 ?

ADC 4 On lance deux fois un dé équilibré et on considère les événements suivants :

- A_1 :« la somme des deux lancers est égale à 6 ».
- A_2 :« la somme des deux lancers est égale à 7 ».
- B :« le premier lancer donne 4 ».

Les événements A_1 et B sont-ils indépendants ? Les événements A_2 et B sont-ils indépendants ?

ADC 5 Si A et B sont deux événements incompatibles à quelle condition sont-ils indépendants ? L'événement A peut-il être indépendant de lui-même ?

Exercices

Exercice 1 À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 9 touches : 1,2,. . .,9. Le code d'ouverture de la porte est composé d'un nombre de quatre chiffres.

1. Combien y a-t-il de codes différents ?
2. Le code a été changé et choisi au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il comporte au moins une fois le chiffre 7 ?
   (b) Quelle est la probabilité que tous les chiffres soient pairs ?
   (c) Quelle est la probabilité que les quatre chiffres soient différents ?

Exercice 2 Un jeu de cartes comporte 32 cartes. On choisit au hasard une main de 8 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un cœur ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux carrés (ensemble de quatre cartes de même valeur) ?

Exercice 3 On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires indiscernables au toucher.
On effectue une série de tirages d'une boule en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans U ;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans l'autre urne ;
- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans la même urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera

- U_n l'événement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U » ;
- V_n l'événement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne V » ;
- B_n l'événement « la n-ième boule est blanche » ;
- N_n l'événement « la n-ième boule est noire ».

On a $P(U_1) = 1$.

1. (a) Calculer $P(U_2)$.
   (b) Calculer $P(U_3)$.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir trois boules blanches lors des trois premiers tirages.
3. Une personne arrive à l'issue du deuxième tirage et sait simplement que la boule qui vient d'être tirée est blanche. Quelle est la probabilité que le deuxième tirage ait eu lieu dans l'urne U ?
4. (a) Démontrer en utilisant la formule des probabilités totales que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P(U_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n)$$
   (b) Écrire alors une fonction python prenant en entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de $P(U_n)$, en utilisant cette relation.
5. Déterminer alors la valeur de $p_n = P(U_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Déterminer $P(B_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 4 Une urne U_1 contient 3 boules blanches et 4 noires, et une urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 noires. On effectue n tirages (avec $n \in \mathbb{N}^*$) dans les conditions suivantes :

- tous les tirages se font avec remise ;
- on effectue un premier tirage dans U_1 ;
- si un tirage donne une boule blanche le tirage suivant se fait dans U_1, sinon il se fait dans U_2.

On note p_n la probabilité d'obtenir une boule blanche au n-ième tirage.

1. Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. En déduire la valeur de p_n pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 5 *Exceptionnellement, on pourra utiliser la calculatrice.*
Une maladie touche 20% de la population d'un pays. Lors d'un dépistage de la maladie, on utilise un test biologique qui a les caractéristiques suivantes :

- lorsque la personne est malade, la probabilité d'avoir un test positif est 0,70.
- lorsque la personne n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,95.

On choisit une personne au hasard dans cette population. On appelle valeur prédictive positive du test (VPP), la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif. On estime que ce test est efficace pour une population donnée lorsque cette probabilité est supérieure à 0,95.

1. Calculer la valeur prédictive positive de ce test. Ce test est-il efficace sur la population étudiée ?
2. Mêmes questions en supposant cette fois que 60% des personnes sont touchées.

Exercice 6 Un système complexe est formé de trois machines M_1, M_2 et M_3 qui peuvent indépendamment tomber en panne dont les probabilités de panne sont respectivement : p_1, p_2 et p_3. Le système tombe en panne dès que l'une au moins des trois machines est en panne.

1. Déterminer la probabilité de panne du système.
2. Le système étant tombé en panne, quelle est la probabilité que la machine M_1 soit tombée en panne ?

Exercice 7 On lance trois pièces de monnaie amenant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. Les trois lancers sont indépendants.
Soient A l'événement « il est apparu au moins un pile et au moins un face » et B l'événement « il est apparu au plus un pile ». Les événements A et B sont-ils indépendants si $p = \dfrac{1}{4}$? si $p = \dfrac{1}{2}$?

Pour aller plus loin

Exercice 8 Soient b, r et n trois entiers naturels non nuls.
Une urne contient b boules blanches et r boules rouges.
On tire n boules :

- ▷ en remettant la boule après tirage si elle est rouge,
- ▷ en ne la remettant pas si elle est blanche.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche en n tirages ?