

TD.PS2 - Corrigé des ADC

ADC1

1) Tirages simultanés

Modélisation: l'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de deux numéros de $\llbracket 1, 9 \rrbracket$. $\text{Card}(\Omega) = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$.

Les tirages sont équiprobables donc on considère la probabilité uniforme P sur Ω .

Soient A : "obtenir des numéros de même parité"

B : "obtenir 2 numéros pairs"

C : "obtenir 2 numéros impairs."

$A = B \cup C$ avec B et C incompatibles donc $P(A) = P(B) + P(C)$.

$$\ast P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Un tirage de B est une combinaison de 2 numéros de

$$\{2, 4, 6, 8\}, \text{ donc } \text{Card}(B) = \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6.$$

$$P(B) = \frac{6}{36}$$

$$\ast P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} \quad \text{et } C \text{ est l'ensemble des combinaisons}$$

de 2 numéros de $\{1, 3, 5, 7, 9\}$: $\text{Card}(C) = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$.

$$P(C) = \frac{10}{36}$$

\ast On a donc

$$P(A) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

2) Tirages successifs avec remise

Modélisation: l'univers Ω est l'ensemble des résultats.

Pour avoir un résultat, on tire successivement deux boules. Il y a 9 possibilités à chaque fois, donc $\text{Card}(\Omega) = 9 \times 9 = 81$.

Les tirages sont équiprobables donc on considère la probabilité uniforme \mathbb{P} sur Ω .

Soient A : "obtenir des numéros de même parité"

B : "obtenir 2 numéros pairs"

C : "obtenir 2 numéros impairs".

$A = B \cup C$ avec B et C incompatibles donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$.

$$\ast \mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Pour obtenir B , on choisit successivement deux numéros de $\{2, 4, 6, 8\}$. Il y a 4 possibilités à chaque étape.

$$\text{Donc } \text{Card}(B) = 4 \times 4 = 16$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{16}{81}$$

$$\ast \mathbb{P}(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} \quad \text{Par un raisonnement analogue,}$$

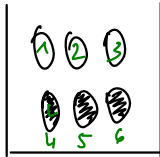
$$\text{Card}(C) = 5 \times 5 = 25 \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}(C) = \frac{25}{81}$$

\ast On a donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{16}{81} + \frac{25}{81} = \frac{41}{81}$$

ADC2

* Cas $n=3$



3 tirages sans remise.

Soit Ω l'univers de l'expérience. Numérotons les boules blanches 1, 2, 3 et les noirs 4, 5, 6.

Pour obtenir un résultat:

→ on tire une 1^{ère} boule : 6 possibilités

→ puis on tire une 2^e, sans remise : 5 possibilités

→ puis une 3^e : 4 possibilités.

$$\text{Donc } \text{Card}(\Omega) = 6 \times 5 \times 4 = 120.$$

Ω est ici muni de la probabilité uniforme car il y a équiprobabilité.

Soit A : "obtenir 3 boules noires".

$\text{Card}(A) = 3 \times 2 \times 1 = 6$ car il y a 3 possibilités pour la 1^{ère} boule, 2 possibilités pour la 2^e et 1 possibilité pour la 3^e.

$$\text{Donc } P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}.$$

* Cas général : on note Ω l'univers en numérotant les boules blanches 1, 2, ..., n et les noirs $n+1, n+2, \dots, 2n$.

$$\text{Card}(\Omega) = (2n) \times (2n-1) \times \dots \times (n+1)$$

car il y a $2n$ possibilités pour la 1^{ère} boule
 $2n-1$ possibilités pour la 2^e boule
 \vdots
 $2n-(n-1)$ possibilités pour la n^e boule

on a toujours équiprobabilité.

Cherchons $\text{Card}(A)$ dans le cas général.

$$\text{Card}(A) = n \times (n-1) \times \dots \times 1$$

car il y a n possibilités pour la 1^{ère} boule
 $n-1$ pour la 2^e
 \vdots
 $n-(n-1)$ pour la n^e

$$\begin{aligned}
 \text{Ainsi } P(A) &= \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \\
 &= \frac{n(n-1) \dots \times 2 \times 1}{(2n)(2n-1) \dots (n+1)} \\
 &= \frac{n!}{(2n)(2n-1) \dots (n+1)} \times \frac{n(n-1) \dots \times 2 \times 1}{n(n-1) \dots \times 2 \times 1}
 \end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Remarque: on peut aussi modéliser avec des tirages simultanés. Dans ce cas

$$\text{Card}(\Omega) = \binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad \text{Card}(A) = \binom{n}{n} = 1$$

$$\text{Donc } P(A) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Méthode 3: Avec les probabilités conditionnelles

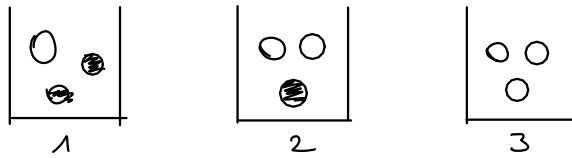
Notons N_k : "obtenir une boule noire au k -ième tirage".

$$A = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n$$

D'après la formule des probabilités composées:

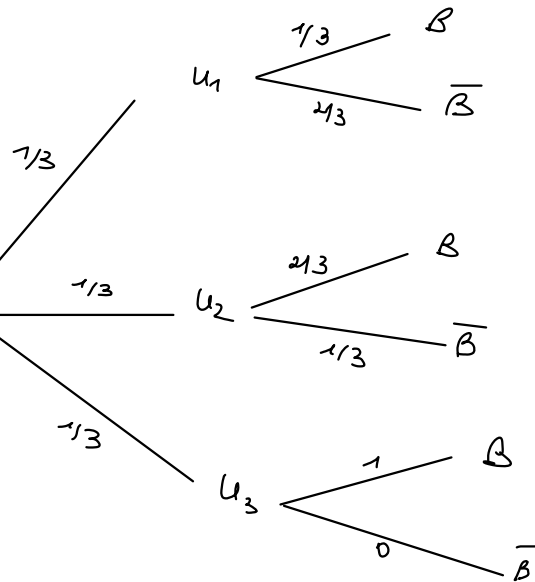
$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(N_1) P_{N_1}(N_2) \dots P_{N_1 \cap \dots \cap N_{n-1}}(N_n) \\
 &= \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \dots \times \frac{1}{2n-(n-1)} \\
 &= \frac{n! \times n!}{(2n)(2n-1) \dots \times (n+1) \times n!} \\
 &= \frac{(n!)^2}{(2n)!}
 \end{aligned}$$

AsC 3



Notons U_k : "on choisit l'urne k "

B : "la boule est blanche".



(U_1, U_2, U_3) est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(U_1) P_{U_1}(B) + P(U_2) P_{U_2}(B) + P(U_3) P_{U_3}(B) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2) On cherche $P_B(U_1)$.

D'après la formule de Bayes

$$\begin{aligned} P_B(U_1) &= \frac{P(U_1) P_{U_1}(B)}{P(B)} \\ &= \frac{1/3 \times 1/3}{2/3} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

ADC 4

d_k : résultat du k -ième lancer.

$d_1 \backslash d_2$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$d_1 + d_2$:

0: A_1

0: A_2

0: B

L'ensemble Ω est l'ensemble des éléments de $\{1, 6\}^2$.

$$\text{Card}(\Omega) = 36.$$

\mathbb{P} est muni de la probabilité uniforme.

• $\text{Card}(A_1) = 5$ donc $P(A_1) = \frac{\text{Card}(A_1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5}{36}$

• $\text{Card}(A_2) = 6$ donc $P(A_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

• $B: "d_1 = 4"$ donc $\text{Card}(B) = 6$ donc $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

A_1 et B : $\text{Card}(A_1 \cap B) = \text{Card}(\{4, 2\}) = 2$ donc

$$P(A_1 \cap B) = \frac{2}{36} \neq P(A_1)P(B)$$

Donc A_1 et B ne sont pas indépendants.

A_2 et B $\text{Card}(A_2 \cap B) = 1$ donc

$$P(A_2 \cap B) = \frac{1}{36} = P(A_2)P(B)$$

Donc A_2 et B sont eux indépendants.

ADC 5

1) Soit $A \cap B = \emptyset$.

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow 0 = P(A)P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0 \text{ ou } P(B) = 0$$

2) A et A indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap A) = P(A)P(A) \Leftrightarrow P(A) - P(A)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow P(A)(1 - P(A)) = 0$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0 \text{ ou } P(A) = 1$$