

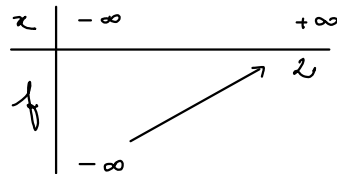
TD AN7 : Corrigé des exercices

Exercice 1

1) f est dérivable sur \mathbb{R} . $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} > 0$

Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



2) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$

en posant $g: x \mapsto f(x) - x$

g est dérivable sur \mathbb{R} par différence. $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^{-x} - 1$.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow -x > 0 \quad \text{par strict croissante de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

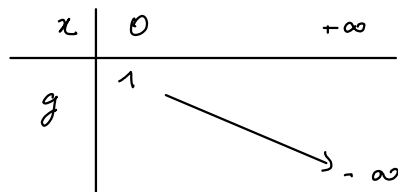
$$\Leftrightarrow x < 0$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	ϕ	$-$

sur $[0, +\infty[$, $g(0) = f(0) - 0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$



- $[0, +\infty[$ est un intervalle
- g est dérivable, donc continue, sur $[0, +\infty[$
- g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ car $g'(x) \leq 0$ sur $[0, +\infty[$ et que $g'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions.

- Notons $J =] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(0)] =] -\infty, 1]$.

$$0 \in J$$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ (équivalente à $f(x) = x$) admet une unique solution α sur $[0, +\infty[$.

On sait alors : $\alpha \in]0, +\infty[$

$$g(\alpha) = 0 \quad \text{donc} \quad f(\alpha) = \alpha.$$

$$3) \quad g(1) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0 \quad \text{car} \quad 2 < e < 3 \quad \text{donc} \\ e-1 > 0 \quad \text{et} \quad e > 0.$$

$$g(2) = -\frac{1}{e^2} < 0$$

$$\text{Ainsi} \quad g(1) \geq g(\alpha) \geq g(2).$$

Par stricte décroissance de g sur $[0, +\infty[$,

$$1 \leq \alpha \leq 2.$$

$$4) \text{ Initialisation : } u_0 = 1 \quad \text{donc} \quad 1 \leq u_0 \leq \alpha. \quad (\text{car } \alpha \geq 1)$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq u_n \leq \alpha$.

Par stricte croissance de f sur \mathbb{R} (question 1)

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha)$$

$$\text{or} \quad f(1) = 2 - \frac{1}{e} \geq 1 \quad \text{car on a vu que } g(1) \geq 0 \\ \text{soit } f(1) - 1 \geq 0$$

$$f(u_n) = u_{n+1}$$

$$f(\alpha) = \alpha$$

$$\text{Donc} \quad 1 \leq u_{n+1} \leq \alpha.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq \alpha$.

$$5) u_{n+1} - u_n = g(u_n)$$

Or $1 \leq u_n \leq \alpha$ et g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ donc $g(u_n) \leq g(\alpha) = 0$.

Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$: (u_n) est décroissante.

6) (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge.

$$\text{Notons } l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in \mathbb{R}.$$

$$\forall n \quad 1 \leq u_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{donc} \quad 1 \leq l \leq \alpha$$

Or $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue en $l \in \mathbb{R}$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l). \quad \text{On obtient}$$

$$l = f(l)$$

Donc $l = \alpha$ d'après 2).

Exercice 2

$$1) f(x) = e^x + e^{1-x} = e^x + e \times e^{-x}$$

Par combinaison linéaire, f est dérivable sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x - e^{1-x}$$

$$f'(x) > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad e^x > e^{1-x} \quad (\Leftrightarrow) \quad x > 1-x$$

$$(\Leftrightarrow) \quad x > \frac{1}{2}$$

par stricte croissance de $x \mapsto e^x$

$$\text{et } f'(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{1/2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f	$+\infty$		$+\infty$

\searrow
 $2e^{1/2}$
 \nearrow

2) * $[\frac{1}{2}, +\infty[$ est un intervalle

* f est continue (car dérivable) sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

* f est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ ($f'(x) > 0$ et $f'(x) = 0$ a un nombre fini de solutions)

$$* J = [f(\frac{1}{2}), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [2e^{1/2}, +\infty[$$

Montrons que $1+e \in J$, c'est à dire que

$$1+e \geq 2e^{1/2}$$

$$1+e \geq 2e^{1/2} > 0 \Leftrightarrow (1+e)^2 \geq 4e$$

par stricte croissance
de $x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R}_+

$$\Leftrightarrow 1 + 2e + e^2 - 4e \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2e + e^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-e)^2 \geq 0 \quad \text{ce qui est vrai}$$

Donc $1+e \in J$.

d'après le théorème de la bijection, $f(x) = 1+e$ a une unique solution dans $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

De même, il y a une unique solution dans $] -\infty, \frac{1}{2}[$
donc 2 solutions au total.

3) $f(1) = e^1 + e^0 = e + 1 = 1 + e$ donc 1 est la solution sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

$f(0) = 1 + e$ donc 0 est celle sur $] -\infty, \frac{1}{2}[$.

L'ensemble des solutions de $f(x) = 1+e$ est $\{0, 1\}$.

Exercice 3

1) f est dérivable sur \mathbb{R}^+ par produit

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \ln(x) + 1.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1$$

$$\Leftrightarrow x > e^{-1} \quad \text{par stricte croissance de } x \mapsto e^x \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{par produit}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{par croissance comparée}$$

$$f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) = e^{-1} \times (-1) = -\frac{1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

2) \bullet f est continue (car dérivable) sur l'intervalle $[\frac{1}{e}, +\infty[$.

\bullet f est strictement croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$
($f'(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0$ a un nombre fini de solutions)

$$\bullet \quad n \in \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= \left[-\frac{1}{e}, +\infty \right[$$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution en $\in [\frac{1}{e}, +\infty[$.

sur $]0, \frac{1}{e}[$, $f(x) < 0$ donc $f(x) = n$ n'y a pas de solution. Il y a bien une seule solution au total.

3) u_0 est la solution de $f(x) = 0$.

Puisque $f(1) = 1 \ln(1) = 0$, on a $u_0 = 1$.

4) $f(u_n) = n$

$$f(u_{n+1}) = n+1 > n = f(u_n).$$

Par stricte croissance de f sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

$$u_{n+1} > u_n$$

la suite (u_n) est croissante (strictement).

5) Soit $n \geq 1$.

$$f(\sqrt{n}) = \sqrt{n} \ln(\sqrt{n})$$

$$f(u_n) = n$$

$$\text{or } n - \sqrt{n} \ln(\sqrt{n}) = \sqrt{n} (\sqrt{n} - \ln(\sqrt{n})) \geq 0$$

$$\text{car } \ln(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} \text{ (car } \ln(x) \leq x \text{ } \forall x > 0)$$

$$\sqrt{n} > 0.$$

$$\text{Donc } f(u_n) \geq f(\sqrt{n})$$

Par stricte croissance de f sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

$$u_n \geq \sqrt{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \text{ donc par minoration } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$