TD – AN6

Fonctions polynomiales

Applications directes du cours

ADC 1 Déterminer le degré des polynômes suivants :

1. $P_1(x) = x^3 - (x-2)^2$
2. $P_2(x) = x^3 - x(x-2)^2$
3. $P_3(x) = (x+1)^{10} - (4x^2+1)^8$, sans développer.

ADC 2 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. $x^3 + 1$ par $x^2 + x + 1$
2. $2x^5 + x^3 + 17x - 2$ par $x^2 + 2x + 3$

ADC 3 Soit $P(x) = -4x^2 + 6x + 4$. Factoriser P dans $\mathbb{R}[x]$.

ADC 4 Soit $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.
Montrer que 2 est racine de P puis factoriser (au maximum) P dans $\mathbb{R}[x]$.

ADC 5 Résoudre le système $\begin{cases} a+b=-2 \\ ab=-15 \end{cases}$ d'inconnue $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercices

Exercice 1

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$,
$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)}.$$
2. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k-1)(k+1)}$, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Exercice 2

1. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}_1[x]$ vérifiant : $P(-1) = -2$ et $P(0) = 1$.
2. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[x]$ vérifiant : $P(-1) = -2$, $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$.
3. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[x]$ vérifiant : $P(-1) = 2$ et $P(1) = 3$.

Exercice 3 On considère la fonction $f : x \mapsto x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 2$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $(x+1)^3$ divise $f(x)$.
2. En déduire le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1. Factoriser, dans $\mathbb{R}[x]$, $P_1(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$.
2. Factoriser, dans $\mathbb{R}[x]$, $P_2(x) = x^4 - 5x^2 + 6$.

Exercice 5 On considère la fonction $g : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 9x + 18$.

1. Montrer que 2 est racine de g.
2. En déduire une factorisation de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^{3x} - 2\,\mathrm{e}^{2x} - 9\,\mathrm{e}^{x} + 18 \geqslant 0$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 Résoudre le système $\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ ab=2 \end{cases}$ d'inconnue $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ définie par

$$\begin{cases} T_0(x)=1,\ T_1(x)=2x \\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x) \end{cases}$$

1. Calculer $T_2(x)$ et $T_3(x)$.
2. Démontrer par récurrence double que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\deg(T_n)=n$.

Exercice 8 Soit $R(x)$ le reste de la division euclidienne de x^n par $P(x)=(x-1)(x-2)$. Que dire du degré de R ? Déterminer $R(1)$ et $R(2)$ puis en déduire R.