TD AL3 : Corrigé des ADC

ADC 1

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = x^3 - (x^2 - 4x + 4) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ donc $\deg(P_1) = 3$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = x^3 - x(x^2 - 4x + 4) = 4x^2 - 4x$ donc $\deg(P_2) = 2$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\deg\left((x+1)^{10}\right) = 10 \deg(x+1) = 10 \times 1 = 10$

$$\deg\left((4x^2+1)^8\right) = 8 \deg(4x^2+1) = 8 \times 2 = 16$$

Donc $\deg\left((x+1)^{10}\right) < \deg\left((4x^2+1)^8\right)$.

D'après le cours,

$$\deg(P_3(x)) = \deg\left((4x^2+1)^8\right) = 16$$

ADC 2

1)

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-(x^3 + x^2 + x) & x - 1 \\ \cline{1-1}
-x^2 - x + 1 & \\
-(-x^2 - x - 1) & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}$$

$\deg(2) = 0 < 2 = \deg(x^2 + x + 1)$

Donc le reste est $R(x) = 2$

et le quotient est $Q(x) = x - 1$

2)

$$\begin{array}{r|l}
2x^5 + x^3 + 17x - 2 & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-(2x^5 + 4x^4 + 6x^3) & 2x^3 - 4x^2 + 3x + 6 \\ \cline{1-1}
-4x^4 - 5x^3 + 17x - 2 & \\
-(-4x^4 - 8x^3 - 12x^2) & \\ \cline{1-1}
3x^3 + 12x^2 + 17x - 2 & \\
-(3x^3 + 6x^2 + 9x) & \\ \cline{1-1}
6x^2 + 8x - 2 & \\
-(6x^2 + 12x + 18) & \\ \cline{1-1}
-4x - 20 &
\end{array}$$

$\deg(-4x - 20) = 1 < 2 = \deg(x^2 + 2x + 3)$

Donc le reste est $R(x) = -4x - 20$

le quotient est

$$Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 6.$$

ADC 3

$P(x) = -4x^2 + 6x + 4$

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-4) \times 4 = 100 > 0$ donc P admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{100}}{2 \times (-4)} = \frac{-6-10}{-8} = 2$$

$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{100}}{2 \times (-4)} = \frac{-6+10}{-8} = -\frac{1}{2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad P(x) = -4\,(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

ADC 4

$P(2) = 2^3 - 2^2 - 14 \times 2 + 24 = 8 - 4 - 28 + 24 = 0.$

Donc 2 est racine de P.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad x - 2$ divise $P(x)$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -\,x^2 & -\,14x & +\,24 & x-2 \\ \cline{5-5}
-(x^3 & -\,2x^2) & & & x^2 + x - 12 \\ \cline{1-4}
 & x^2 & -\,14x & +\,24 & \\
 & -(x^2 & -\,2x) & & \\ \cline{2-4}
 & & -12x & +\,24 & \\
 & & -(-12x & +\,24) & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Donc $\quad P(x) = (x-2)(x^2 + x - 12).$

Factorisons $x^2 + x - 12$.

$\Delta = 1 + 4 \times 12 = 49 > 0.$

$x^2 + x - 12$ a deux racines $\quad x_1 = \dfrac{-1-7}{2} = -4$

$$x_2 = \frac{-1+7}{2} = 3.$$

Ainsi $\quad x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$

Donc $\quad P(x) = (x-2)(x+4)(x-3)$

ADC 5

$$\begin{cases} a+b = -2 \\ ab = -15 \end{cases} \iff a \text{ et } b \text{ sont les racines de}$$

$$P(x) = x^2 + 2x + (-15)$$

On a : $\Delta = 4 + 4 \times 15 = 64 > 0$. donc P a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-8}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+8}{2} = 3$$

Donc $(a, b) = (-5, 3)$ ou $(a, b) = (3, -5)$