

TD – AN5

LIMITES D'UNE FONCTION

Applications directes du cours

ADC 1 Étudier les limites des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto x^3 + 7x + 2$ en $-\infty$ et $+\infty$

2. $x \mapsto x^5 + 5x^2 - e^x$ en $-\infty$ et $+\infty$

3. $x \mapsto \frac{x - \ln(x)}{3x + \sqrt{x}}$ en 0 et $+\infty$

4. $x \mapsto x e^x$ en $-\infty$ et $+\infty$

5. $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$ en 0 et en $+\infty$

6. $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0

7. $x \mapsto \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ en $+\infty$

8. $x \mapsto \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$ en 4

ADC 2 Étudier les limites des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \ln(x) \times \ln(\ln(x))$ en 1

2. $x \mapsto \frac{e^{-x} - 1}{x}$ en 0

3. $x \mapsto \frac{\ln(\sqrt{x})}{x^3}$ en $+\infty$ et en 0.

4. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^3}$ en 0.

5. $x \mapsto \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$ en $+\infty$

6. $x \mapsto \frac{e^x - e^3}{x - 3}$ en 3.

ADC 3 Étudier les limites des fonctions suivantes (si besoin, on séparera limite à gauche et à droite).

1. $x \mapsto \frac{x^2 + 2|x|}{x}$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.

2. $x \mapsto \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1-x^2}$ en 1 et -1

ADC 4 Les fonctions suivantes admettent-elles une limite en 0?

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{|x(x-1)|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$h: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ \frac{x e^x}{1 - e^x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercices

Exercice 1 Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1+e^{-x})$.

Exercice 2 Soit $f : x \mapsto x e^x$. Dresser le tableau de variation complet de f .

Exercice 3 Soit $f : x \mapsto 2x^2 - \ln(x)$. Dresser le tableau de variation complet de f .

Exercice 4 On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Montrer que f est impaire.
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Dresser le tableau de variation complet de f .

Exercice 5 On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1) \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer les limites en $+\infty$, 0 et 1^- .
3. Démontrer que pour tout réel $u > -1$, $\ln(1+u) \leq u$.
4. Déterminer la limite de $u e^{\frac{1}{u}}$ quand $u \rightarrow 0^+$.
5. En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow 1^+$.

Exercice 6 Soit $f : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ définie sur \mathbb{R}^* .

1. Exprimer $f(x)$ pour $x > 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Par une méthode analogue, étudier la limite de f en $-\infty$.
3. Encadrer $f(x)$ pour $x > 0$. En déduire la limite de f à droite en 0.
4. Par une méthode analogue, étudier la limite de f à gauche en 0.

Pour aller plus loin

Exercice 7 Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$