TD – AN5

CONTINUITE

Applications directes du cours

ADC 1 Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \qquad g\colon \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ \ln(x-1) & \text{si } 1 < x < 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases} \end{array}$$

ADC 2 Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

1. Justifier que f est continue sur $]0,1[$.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? en 0 ?

ADC 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

ADC 4 Démontrer que la fonction $f\colon x \mapsto \sqrt{2x-4}$ réalise une bijection de $[2,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ et déterminer l'expression de la fonction réciproque associée.

ADC 5 Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

ADC 6 Démontrer que la fonction $g\colon x \mapsto e^{-x} + x$ réalise une bijection de $]-\infty,0]$ dans un intervalle à déterminer. On note φ la réciproque associée. Dresser son tableau de variation.

Exercices

Exercice 1 Étudier la continuité en 0 de $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 2 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et telle que :

$$f(0) = 3 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

1. Montrer par récurrence sur n que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que f est constante, de valeur 3.

Exercice 3 Soit $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. On note $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^x - nx$.

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur l'intervalle $]-\infty, \ln(n)]$ et une unique solution v_n sur $[\ln(n), +\infty[$.
2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$.
3. Démontrer que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 3$.
4. Soit $n \geqslant 3$. Démontrer que $f_{n+1}(u_n) = -u_n$ puis que $f_{n+1}(u_n) \leqslant f_{n+1}(u_{n+1})$. En déduire que que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.
5. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.
6. Démontrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Pour aller plus loin

Exercice 5 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = 1$.
Montrer que f est constante, égale à 1 ou -1.

Exercice 6 Résoudre l'équation $x^x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 7 Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.