TD ANS : Corrigé des PAPL

Exercice 5

Supposons, par l'absurde, que f ne soit pas constante.
Pour tout réel x, $f(x)^2 = 1$ donc $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$.
f n'étant pas constante, il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = 1$ et $f(b) = -1$

Or f est continue sur $\mathbb{R}$ et 0 est entre $f(a)$ et $f(b)$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
Ceci est absurde car $f(x) = 1$ ou -1 pour tout x

Conclusion : f est constante sur $\mathbb{R}$ et comme $f(x) = \pm 1$, cette constante vaut soit 1 soit -1.

Exercice 6

- Soit $f : x \mapsto x^x = \exp(x \ln(x))$.

Par produit, $x \mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Comme $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composée, f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

- Soit $x > 0$,

$$f'(x) = \left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x} \right) e^{x\ln(x)}$$
$$= \left(\ln(x) + 1 \right) e^{x\ln(x)}$$

or $\ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > e^{-1}$
par stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$.

et $\ln(x)+1=0 \iff \ln(x)=-1 \iff x=e^{-1}$

De plus $e^{x\ln(x)}>0$ pour tout réel x

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Remarquons que $f'(x)=0$ a un nombre fini de solutions
donc f est strictement décroissante sur $]0,\frac{1}{e}]$
et strictement croissante sur $[\frac{1}{e},+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	$\|\|$ 1	$\searrow$	$\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2^{1/2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}=f\left(\frac{1}{2}\right)$

On voit déjà que $\frac{1}{2}$ est une solution.

$2<e$ donc $\frac{1}{2}>\frac{1}{e}$

Par stricte croissance de f sur $[\frac{1}{e},+\infty[$, f est injective sur $[\frac{1}{e},+\infty[$ donc $\frac{1}{2}$ est l'unique antécédent de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[\frac{1}{e},+\infty[$.

De plus $f\left(\frac{1}{2}\right)>f\left(\frac{1}{e}\right)$ donc $\frac{\sqrt{2}}{2}>\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$
et $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$ donc $\frac{\sqrt{2}}{2}\in\left]\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e},1\right[$.

f étant continue et strictement décroissante sur $]0,\frac{1}{e}[$, le théorème de la bijection assure qu'il y a une deuxième solution sur $]0, \frac{1}{e}[$.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/4} = \frac{1}{4^{1/4}} = \frac{1}{2^{2 \times 1/4}} = \frac{1}{2^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donc $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{1}{4} \in]0, \frac{1}{e}[$

donc c'est bien la 2^e solution cherchée.

<u>Conclusion</u> : il y a deux solutions : $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{4}$.

<u>Exercice 7</u>

$f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0$$

Posons $g : x \mapsto f(x) - x$ <u>continue sur $[0,1]$</u> par différence.

$g(0) = f(0) \geqslant 0$

$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(1) \leq 1$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0,1]$.