

TD ANS : Corrigé des PAPL

Exercice 5

Supposons, par l'absurde, que f ne soit pas constante.

Pour tout réel x , $f(x)^2 = 1$ donc $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$.

f n'étant pas constante, il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = 1$ et $f(b) = -1$.

Or f est continue sur \mathbb{R} et 0 est entre $f(a)$ et $f(b)$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans \mathbb{R} .

Ceci est absurde car $f(x) = 1$ ou -1 pour tout x .

Conclusion : f est constante sur \mathbb{R} et comme $f(x) = \pm 1$, cette constante vaut soit 1 soit -1.

Exercice 6

• Soit $f : x \mapsto x^x = \exp(x \ln(x))$.

Par produit, $x \mapsto x \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Comme \exp est dérivable sur \mathbb{R} , par composée, f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

• Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x} \right) e^{x \ln(x)} \\ &= (\ln(x) + 1) e^{x \ln(x)} \end{aligned}$$

or $\ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$

par stricte croissance de \exp sur \mathbb{R} .

et $\ln(x)+1=0 \Leftrightarrow \ln(x)=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}$

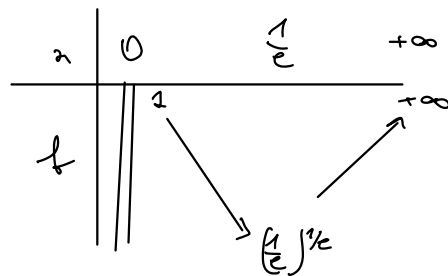
De plus $x \ln(x) > 0$ pour tout réel x

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	\parallel	$-$	$+$

Remarquons que $f'(x)=0$ a un nombre fini de solutions donc f est strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{e}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ par croissance comparée donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.



• $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{1/2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$

On voit déjà que $\frac{1}{2}$ est une solution.

$2 < e$ donc $\frac{1}{2} > \frac{1}{e}$

Par stricte croissance de f sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$, f est injective sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$ donc $\frac{1}{2}$ est l'unique antécédent de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$.

De plus $f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{1}{e}\right)$ donc $\frac{\sqrt{2}}{2} > \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$
 et $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ donc $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \left] \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}, 1 \right[$.

f étant continue et strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{e}[$,

le théorème de la bijection assure qu'il y a une deuxième solution sur $]0, \frac{1}{2}[$.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/4} = \frac{1}{4^{1/4}} = \frac{1}{2^{2 \times 1/4}} = \frac{1}{2^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donc $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{1}{4} \in]0, \frac{1}{2}[$

donc c'est bien la 2^e solution cherchée.

Conclusion: il y a deux solutions : $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{4}$.

Exercice 7

$f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ continue. Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0$$

Posons $g: x \mapsto f(x) - x$ continue sur $[0,1]$ par différence.

$$g(0) = f(0) \geq 0$$

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \quad \text{car} \quad f(1) \leq 1.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0,1]$.