TD AN5 : Corrigé des exercices

Exercice 1

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor.$$

$f(0) = 0 - \lfloor 0 \rfloor = 0$

En 0 : On sait que $\lim_{x \to 0^-} \lfloor x \rfloor = -1$ et $\lim_{x \to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0$ (cours)

donc $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq f(0)$

donc f n'est pas continue en 0.

Exercice 2

1) Par récurrence.

Initialisation : $f\left(\frac{x}{2^0}\right) = f\left(\frac{x}{1}\right) = f(x)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{\frac{x}{2^n}}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad \text{d'après l'énoncé}$$

$$= f(x) \quad \text{par H.R.}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$

2) $u_n = \frac{x}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Or, par continuité de f en 0, $\lim_{y \to 0} f(y) = f(0) = 3$

Donc $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = 3$

Or $f(u_n) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$ donc on a aussi $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(x)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 3$ et f est constante.

Exercice 3

Soit $g : x \mapsto f(x) - x = \dfrac{e^{-x}}{x} - x$.

g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$

$$g'(x) = \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x}}{x^2} - 1$$

$$= -\frac{e^{-x}(x+1)}{x^2} - 1$$

$$\leqslant -1 < 0 \quad \text{car} \quad e^{-x} > 0, \; x+1 \geqslant 0, \; x^2 \geqslant 0$$

Donc g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

. $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ par opérations usuelles

. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ idem.

Ainsi :

→ g est <u>continue</u> (car dérivable) sur $]0, +\infty[$

→ g est <u>strictement décroissante</u> sur $]0, +\infty[$

→ $0 \in \left]-\infty, +\infty\right[= \left]\lim\limits_{x \to +\infty} g(x), \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)\right[$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$.

Or $g(x) = 0 \iff f(x) = x$

Donc $f(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$.

Exercice 4 $\qquad f_n(x) = e^{x} - nx \quad , \quad n \geqslant 3.$

1) · f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

· $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty$ car $n > 0$

· et $f_n(x) = e^{x}\left(1 - n\dfrac{x}{e^{x}}\right)$ et $\dfrac{x}{e^{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

· $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad f_n'(x) = e^{x} - n$

$f_n'(x) \geqslant 0 \iff e^{x} \geqslant n \iff x \geqslant \ln(n)$

par stricte croissance du $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

x	$-\infty$		$\ln(n)$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$f_n(\ln(n))$	$\nearrow$	$+\infty$

et $f_n(\ln(n)) = e^{\ln(n)} - n\ln(n) = n - n\ln(n) = n\,(1 - \ln(n))$

On a, pour $n \geqslant 3$:

→ f_n est continue sur $]-\infty, \ln(n)]$

→ $f_n'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions

f_n est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln(n)]$.

→ $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty > 0$

$f_n(\ln(n)) = n\,(1 - \ln(n)) < 0$ car $n > 0$ et $\ln(n) > 1$ $(n \geqslant 3)$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $]-\infty, \ln(n)]$.

On procède de même sur $[\ln(n), +\infty[$ pour justifier l'existence et l'unicité de v_n.

2) $u_n \in [\ln(n), +\infty[$ donc $u_n \geq \ln(n)$.

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$ donc par minoration $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

3) $f_n(0) = 1 \geqslant 0$ donc $f_n(0) \geq f_n(u_n)$

Par stricte décroissance de f_n sur $]-\infty, 0]$ $(0 \leq \ln(n))$,

$\boxed{0 \leq u_n}$

4) $f_{n+1}(u_n) = e^{u_n} - (n+1)u_n$

$= e^{u_n} - n u_n - u_n$

$= f_n(u_n) - u_n$

$= -u_n$ car $f_n(u_n) = 0$.

or $u_n \geqslant 0$ donc $f_{n+1}(u_n) \leq 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.

Par stricte décroissante de f_{n+1} sur $]-\infty, \ln(n+1)]$

(avec $u_n \leq \ln(n) \leq \ln(n+1)$) on a : $u_n \geq u_{n+1}$.

(u_n) est donc décroissante.

5) (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc

d'après le théorème de la limite monotone, elle

converge vers un réel $l \geq 0$.

6) Supposons par l'absurde que $l \neq 0$.

On a donc $l > 0$.

On sait que $f_n(u_n) = 0$ i.e. $e^{u_n} - n u_n = 0$

$n u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ par produit

$e^{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{l} \in \mathbb{R}$ donc $e^{u_n} - n u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Absurde.

Donc $\boxed{l = 0}$