TD – AN3

Corrigé des exercices

Exercice 1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

Par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Exercice 2 On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{array}{lll} & 0 \leqslant k \leqslant n & \\ \text{donc} & n^2 \leqslant k + n^2 \leqslant n + n^2 & \\ \text{donc} & \sqrt{n^2} \leqslant \sqrt{k+n^2} \leqslant \sqrt{n+n^2} & \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[\\ \text{donc} & \dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{k+n^2}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}} & \text{car } x \mapsto \dfrac{1}{x} \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[\\ & & \text{et } \sqrt{n^2} = n \text{ (car } n \geqslant 0). \end{array}$$

Par croissance de la somme,

$$\begin{array}{ll} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} \\ \text{donc} & \dfrac{1}{n} \times (n+1) \geqslant S_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}} \times (n+1) \\ \text{donc} & \dfrac{n+1}{\sqrt{n+n^2}} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n+1}{n} \end{array}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

et

$$\frac{n+1}{\sqrt{n+n^2}} = \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2}\sqrt{\frac{1}{n} + 1}} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1.$$

Exercice 3 Pour $n \geqslant 2$, on considère $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Soit $n \geqslant 2$.

$$u_{n+1} - u_n = \left(u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \right) - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$$

donc (u_n) est croissante.

2. Soit $k \geqslant 2$.
$$0 < k-1 \leqslant k \text{ donc } (k>0) \;\; 0 < k(k-1) \leqslant k^2.$$
Par passage à l'inverse
$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
Autre méthode :
$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} = \frac{(k-1)-(k^2)+(k(k-1))}{k^2(k-1)} = \frac{-1}{k^2(k-1)} \leqslant 0$$
donc
$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
3. De l'inégalité précédent, on déduit, par croissance de la somme
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$
Or, par télescopage,
$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$
Donc
$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1.$$
4. (u_n) est croissante et majorée par 1 donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

Exercice 4 **Monotonie de (S_n) :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$

Donc la suite (S_n) est croissante.

Monotonie de (T_n) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= (S_{n+1} - S_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)^2} \leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (T_n) est décroissante.

Limite de $(T_n - S_n)$:
$$T_n - S_n = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
Conclusion : les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 5 1. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{3^j}_{constante} \right) = \sum_{j=0}^{n} n3^j = n \sum_{j=0}^{n} 3^j = n\frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{n(3^{n+1}-1)}{2}$

ou alors
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} 3^j \right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{1-3^{n+1}}{1-3}}_{constante} = \frac{1-3^{n+1}}{-2} \times n = \frac{n(3^{n+1}-1)}{2}$$

2. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\underbrace{3^j}_{constante}\right)=\sum_{j=0}^{n} j3^j$, ce n'est pas une somme connue.

   Essayons autrement.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} 3^j\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(3^i \times \frac{1-3^{n-i+1}}{1-3}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{3^i-3^{n+1}}{-2}\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}3^i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{3^{n+1}}_{constante}\\
&= -\frac{1}{2}\times 3\times\frac{1-3^n}{1-3}+\frac{1}{2}3^{n+1}\times n\\
&= \frac{3-3^{n+1}}{4}+\frac{n3^{n+1}}{2}\\
&= \frac{3+(2n-1)3^{n+1}}{4}
\end{aligned}$$