TD – AN4

LIMITES D'UNE FONCTION

Applications directes du cours

Étudier les limites des fonctions suivantes (si besoin, on séparera limite à gauche et à droite).

ADC 1

1. $x \longmapsto x^5 + 5x^2 - \mathrm{e}^x$ en $-\infty$ et $+\infty$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{1-x^2}$ en 1 et -1
3. $x \longmapsto \dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$ en $+\infty$.
4. $x \longmapsto \dfrac{x^2+2|x|}{x}$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.

ADC 2

1. $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0
2. $x \longmapsto \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$ en $+\infty$
3. $x \longmapsto \dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$ en 4.

ADC 3

1. $x \longmapsto \ln(x) \times \ln(\ln(x))$ en 1
2. $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x}$ en 0
3. $x \longmapsto \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^{\frac{1}{3}}}$ en $+\infty$
4. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ en 0.
5. $x \longmapsto \left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$ en $+\infty$
6. $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^3}{x-3}$ en 3.

ADC 4 Les fonctions suivantes admettent-elles une limite en 0 ?

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \\ x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{array} \qquad g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{|x(x-1)|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$h\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^x & \text{si } x>0 \\ \dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x} & \text{si } x<0 \end{cases} \end{array}$$

Exercices

Exercice 1 Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\mathrm{e}^{-x})$.

Exercice 2 On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)\exp\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites en $+\infty$, 0 et 1^-.
3. Démontrer que pour tout réel $u > -1$, $\ln(1+u) \leqslant u$.
4. Déterminer la limite de $u\,\mathrm{e}^{\frac{1}{u}}$ quand $u \to 0^+$.
5. En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^+$.

Exercice 3 Soit $f\colon x \mapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Exprimer $f(x)$ pour $x > 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Par une méthode analogue, étudier la limite de f en $-\infty$.
3. Encadrer $f(x)$ pour $x > 0$. En déduire la limite de f à droite en 0.
4. Par une méthode analogue, étudier la limite de f à gauche en 0.

Pour aller plus loin

Exercice 4 Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(\mathrm{e}+x))^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(1+\mathrm{e}^{-x}))^{\frac{1}{x}}$