TD AN4 - Corrigé des exercices

Exercice 1

1) $\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

Posons $h = -x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1+h)}{-h} = -\frac{\ln(1+h)}{h}$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$

2) $\dfrac{\ln(1+x^3)}{x}$.

Posons $h = x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Rq : $x = h^{1/3}$ valable seulement si $x>0$, $h>0$.

$$\frac{\ln(1+x^3)}{x} = \frac{\ln(1+h)}{h} \times \frac{h}{x} = \frac{\ln(1+h)}{h} \times x^2$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ par taux d'accroissement usuel

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x} = 1\times 0 = 0$.

3) $x\ln(1+e^{-x})$ en $+\infty$

Posons $h = e^{-x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$.

$h = e^{-x} \Leftrightarrow \ln(h) = -x$

$\Leftrightarrow x = -\ln(h)$

$$x\ln(1+e^{-x}) = -\ln(h)\ln(1+h)$$
$$= -h\ln(h) \times \frac{\ln(1+h)}{h}$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0} h\ln(h) = 0$ par croissance comparée

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(1+e^{-x}) = -0\times 1 = 0$.

Exercice 2

$$f(x) = (x-1)\exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$$

1) $x \mapsto x-1$ est polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0,+\infty[$ donc $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ est définie sur $\{x \in]0,+\infty[\mid \ln(x) \neq 0\} =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

$\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc par composée et produit, f est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

2) En $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right) = 1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$.

Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

En 0

$\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right) = 1$

et $\lim\limits_{x\to 0} (x-1) = -1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

En 1^-

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\ln(x)} = -\infty$.

Or $\lim\limits_{X\to -\infty} \exp(X) = 0$ donc

$\lim\limits_{x\to 1^-} \exp\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right) = 0$. De plus $\lim\limits_{x\to 1^-} (x-1) = 0$

Par produit, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$.

Remarque : la limite en 1^+ est indéterminée « $0 \times (+\infty)$ ».

3) Notons $g : u \mapsto \ln(1+u) - u$ définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$

car $1+u > 0 \iff u > -1$.

Pour $u > -1$, $g'(u) = \dfrac{1}{1+u} - 1 = \dfrac{-u}{1+u}$

u	-1		0		$+\infty$
$-u$	‖	$+$	0	$-$	
$1+u$	‖	$+$		$+$	
$g'(u)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

$g(0) = \ln(1) - 0 = 0$

g admet un maximum en 0 qui vaut $g(0) = 0$ donc

Pour tout $u > -1$, $g(u) \leq 0$, c'est-à-dire $\ln(1+u) \leq u$.

3) $u e^{\frac{1}{u}}$ pour $u \to 0^+$

Posons $X = \dfrac{1}{u} \xrightarrow[u \to 0^+]{} +\infty$.

$u e^{\frac{1}{u}} = \dfrac{1}{X} e^X = \dfrac{e^X}{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty$ par croissance comparée

Donc $\lim\limits_{u \to 0^+} u e^{\frac{1}{u}} = +\infty$.

4) Posons $u = x - 1 \xrightarrow[x \to 1^+]{} 0^+$. Supposons donc $u > 0$

$$f(x) = (x-1) \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) = u \exp\left(\frac{1}{\ln(1+u)}\right)$$

or $0 < \ln(1+u) \leq u$

donc $\dfrac{1}{\ln(1+u)} \geq \dfrac{1}{u}$ par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\exp\left(\dfrac{1}{\ln(1+u)}\right) \geq \exp\left(\dfrac{1}{u}\right)$ par croissance de exp sur $\mathbb{R}$.

Puisque $u > 0$, $u \exp\left(\dfrac{1}{\ln(1+u)}\right) \geq u \exp\left(\dfrac{1}{u}\right)$

Or $\lim_{u \to 0^+} u \exp\left(\frac{1}{u}\right) = +\infty$.

Par théorème d'existence de limite par minoration,

$$\lim_{u \to 0^+} u \exp\left(\frac{1}{\ln(1+u)}\right) = +\infty$$

Conclusion : $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Exercice 3

1) Si $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$ donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$

donc $f(x) = 0$. Ainsi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2) Si $x < -1$, $-1 < \frac{1}{x} < 0$ donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -1$

donc $f(x) = -x$. Ainsi $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

3) Soit $x > 0$

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$$

donc $1 - x < f(x) \leq 1$ car $x > 0$

Or $\lim_{x \to 0^+} (1-x) = 1$ donc par encadrement $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

4) Si $x < 0$, $1 - x > f(x) \geq 1$ donc de même

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$.