TD – AN3

Sommes et produits

Applications directes du cours

ADC 1 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{10} 3; \qquad \sum_{k=1}^{n} 5; \qquad \sum_{i=0}^{3} i^3; \qquad \sum_{k=1}^{5} \ln(k).$$

ADC 2 Calculer les produits suivantes :

$$\prod_{k=0}^{10} 2; \qquad \prod_{k=1}^{n} 5; \qquad \prod_{i=0}^{3} i!; \qquad \prod_{k=1}^{5} \exp(k).$$

ADC 3 Calculer (on attend un résultat simplifié) avec $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(n+1)!}{n!}; \qquad \frac{(n+2)!}{n!}; \qquad \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$$

ADC 4 Calculer, en utilisant les résultats du cours.

$$\sum_{i=10}^{20} i; \qquad \sum_{k=1}^{n+1} k; \qquad \sum_{k=1}^{n} (2k+1); \qquad 3+4+5+\cdots+15.$$

ADC 5 Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

ADC 6 Calculer, en utilisant les résultats du cours.

$$\sum_{k=2}^{10} 2^k; \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{4^k}; \qquad \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k \times 2^{k+1}\right); \qquad \sum_{\ell=0}^{n} \mathrm{e}^{\ell+1}.$$

ADC 7 Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right); \qquad \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

en faisant apparaître des télescopages.

Exercices

Exercice 1 On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{n+1}{\sqrt{n+n^2}} \leqslant S_n \leqslant \frac{n+1}{n}$.

2. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, on considère $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
3. En utilisant la propriété de croissance de la somme, montrer que $u_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 2$.
4. Justifier la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

Exercice 3 Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes.

Exercice 4

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2} = \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.
2. En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

Pour aller plus loin

Exercice 5 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^{n+1} - b^{n+1}.$$

Exercice 6 Calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Indication : faire apparaître un télescopage ou alors deviner le résultat et le montrer par récurrence.

Exercice 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire, en raisonnant par l'absurde, que $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.