TD – AN3

Corrigé des "Pour aller plus loin"

Exercice 5

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \left((a-b)a^k b^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(a^{k+1}b^{n-k} - a^k b^{n-k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(a^{k+1}b^{n-k} - a^k b^{n-(k-1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) && \text{avec } u_k = a^k b^{n-(k-1)} \\
&= u_{n+1} - u_0 && \text{par télescopage} \\
&= a^{n+1}b^0 - a^0 b^{n-+1} \\
&= a^{n+1} - b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Exercice 6

Calculer les sommes suivantes :

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \times k! &= \sum_{k=1}^{n} (k+1-1) \times k! \\
&= \sum_{k=1}^{n} ((k+1) \times k! - k!) \\
&= \sum_{k=1}^{n} ((k+1)! - k!) \\
&= (n+1)! - 1! && \text{par télescopage} \\
&= (n+1)! - 1
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \\
&= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} && \text{par télescopage} \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Exercice 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} H_{n+1} - H_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Donc (H_n) est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, (H_n) admet une limite qui peut être soit réelle soit égale à $+\infty$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} H_{2n} - H_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Soit $k \in [\![n+1, 2n]\!]$.

$$\begin{aligned} & n+1 \leqslant k \leqslant 2n \\ \text{donc} \quad & \frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n} \qquad \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[. \end{aligned}$$

Par croissance de la somme (on ne garde que la 2e inégalité ici)

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \times (2n - (n+1) + 1)$$

donc

$$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

3. On a vu à la quesiton 1) que (H_n) admet une limite qui peut être soit réelle soit égale à $+\infty$. Supposons, par l'absurde, que (H_n) tende vers un réel ℓ.

On a

$$H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \text{et} \quad H_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Puisque ℓ est un réel

$$H_{2n} - H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci est absurde car $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

On en déduit que l'hypothèse de départ est fausse : (H_n) ne tend par vers un réel. Nécessairement,

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty.$$