

TD – AN3

CORRIGÉ DES EXERCICES

Exercice 1 On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$0 \leq k \leq n$$

$$\text{donc } n^2 \leq k+n^2 \leq n+n^2$$

$$\text{donc } \sqrt{n^2} \leq \sqrt{k+n^2} \leq \sqrt{n+n^2} \quad \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} \quad \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[$$

$$\text{et } \sqrt{n^2} = n \text{ (car } n \geq 0).$$

Par croissance de la somme,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{n} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \times (n+1) \geq S_n \geq \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} \times (n+1)$$

$$\text{donc } \frac{n+1}{\sqrt{n+n^2}} \leq S_n \leq \frac{n+1}{n}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et

$$\frac{n+1}{\sqrt{n+n^2}} = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{n^2}\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1.$$

Exercice 2 Pour $n \geq 2$, on considère $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Soit $n \geq 2$.

$$u_{n+1} - u_n = \left(u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \right) - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$

donc (u_n) est croissante.

2. Soit $k \geq 2$.

$$0 < k-1 \leq k \text{ donc } (k > 0) \quad 0 < k(k-1) \leq k^2.$$

Par passage à l'inverse

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Autre méthode :

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} = \frac{(k-1) - (k^2) + (k(k-1))}{k^2(k-1)} = \frac{-1}{k^2(k-1)} \leq 0$$

donc

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

3. De l'inégalité précédent, on déduit, par croissance de la somme

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

Or, par télescopage,

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Donc

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1.$$

4. (u_n) est croissante et majorée par 1 donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

Exercice 3 Monotonie de (S_n) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.

Donc la suite (S_n) est croissante.

Monotonie de (T_n) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= (S_{n+1} - S_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (T_n) est décroissante.

Limite de $(T_n - S_n)$:

$$T_n - S_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Conclusion : les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 4 Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

Par télescopage,

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$