TD AN3 – Sommes et produits
Corrigé des APC

APC 1

$$\sum_{k=0}^{10} 3 = \underset{k=0}{3} + \underset{k=1}{3} + \underset{k=2}{3} + \underset{k=3}{3} + \underset{k=4}{3} + \underset{k=5}{3} + \underset{k=6}{3} + \underset{k=7}{3} + \underset{k=8}{3} + \underset{k=9}{3} + \underset{k=10}{3}$$

$$= 3 \times (\text{nombre de termes})$$

$$= 3 \times 11$$

$$= 33$$

$$\sum_{k=1}^{n} 5 = 5 \times (\text{nombre de termes}) = 5 \times n = 5n$$

$$\sum_{i=0}^{3} i^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$$

$$\sum_{k=1}^{5} \ln(k) = \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \ln(5)$$

$$= \ln(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)$$

$$= \ln(120)$$

APC 2

$$\prod_{k=0}^{10} 2 = \underset{k=0}{2} \times \underset{k=1}{2} \times \underset{k=2}{2} \times \underset{k=3}{2} \times \underset{k=4}{2} \times \underset{k=5}{2} \times \underset{k=6}{2} \times \underset{k=7}{2} \times \underset{k=8}{2} \times \underset{k=9}{2} \times \underset{k=10}{2}$$

$$= 2^{\text{nombre de termes}}$$

$$= 2^{11}$$

$$= 2048$$

$$\prod_{k=1}^{n} 5 = 5^{\text{nombre de termes}} = 5^n$$

$$\prod_{i=0}^{3} i! = 0! \times 1! \times 2! \times 3!$$

$$= 1 \times 1 \times 2 \times 6$$

$$= 12$$

ADC3

* $$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\dots\times\cancel{n}\times(n+1)}{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\dots\times\cancel{n}} = n+1$$

ou, étant donné que $(n+1)! = (n+1)\times n!$

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\times \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1$$

* $$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)\,n!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

* $$\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = \underbrace{\frac{1}{\cancel{2}}}_{i=1} \times \underbrace{\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}}_{i=2} \times \underbrace{\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}}_{i=3} \times \dots \times \underbrace{\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}}}_{i=n-1} \times \underbrace{\frac{\cancel{n}}{n+1}}_{i=n}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

ADC4

* $(i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, donc

$$\sum_{i=10}^{20} i = \frac{1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} \times (\text{nombre de termes})$$

$$= \frac{10+20}{2} \times (20-10+1)$$

$$= \frac{30}{2} \times 11$$

$$= 15 \times 11$$
$$= 165$$

* $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{N} k \qquad \text{avec} \qquad N = n+1$$

$$= \frac{N(N+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ou : $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ est arithmétique donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} \times (\text{nombre de termes})$$

$$= \frac{1+(n+1)}{2} \times (n+1)$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = 2 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ par linéarité

$\displaystyle = 2 \frac{n(n+1)}{2} + 1 \times (\text{nombre de termes})$

$= n(n+1) + n$

$= n(n+2)$

<u>ou</u> : $(2k+1)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = \frac{1^{er} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} \times (\text{nombre de termes})$

$\displaystyle = \frac{(2\times1+1) + (2n+1)}{2} \times n$

$\displaystyle = \frac{2n+4}{2} \times n$

$= n(n+2)$ car $2n+4 = 2(n+2)$

* $\displaystyle 3+4+5+\dots+15 = \sum_{k=3}^{15} k$ or $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

$\displaystyle = \frac{1^{er} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} \times (\text{nombre de termes})$

$\displaystyle = \frac{3+15}{2} \times (15-3+1)$

$= 9 \times 13$

$= 117$

ADC 5

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons par récurrence que $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : si $n = 1$.

$S_1 = 1^3 = 1$ et $\frac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$ donc $S_1 = \frac{1^2 \times 2^2}{4}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Alors $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^3$

$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$ on sort le dernier terme

$= S_n + (n+1)^3$

$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

$= \frac{(n+1)^2 \left(n^2 + 4(n+1)\right)}{4}$

$= \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4)}{4}$

$= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ADC 6

* $(2^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $2 \neq 1$ donc :

$$\sum_{k=2}^{10} 2^k = 1^{er} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

$$= 2^2 \times \frac{1 - 2^{(10-2+1)}}{1-2}$$

$$= 4 \times \frac{1-2^9}{-1}$$

$$= 4(2^9 - 1)$$

$$= 4 \times 511$$

$$= 2044$$

* $$\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{4^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

Or $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{3}{4} \neq 1$ donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{4^k} = \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \frac{1-(3/4)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$= 1 \times \frac{1-(3/4)^{n+1}}{\frac{1}{4}}$$

$$= 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

* $$\sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k \times 2^{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k \times 2^k \times 2^1\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left((-1 \times 2)^k \times 2\right)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} (-2)^k$$

Or $((-2)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-2 \neq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k \times 2^{k+1}\right) = 2 \times (-2)^1 \times \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}$$

$$= -4 \times \frac{1-(-2)^n}{3}$$

$$= -\frac{4}{3}\left(1-(-2)^n\right)$$

$\times \quad \sum_{l=0}^{n} e^{l+1} = \sum_{l=0}^{n} e \times e^{l} = e \sum_{l=0}^{n} e^{l}$

$$= e \times e^{0} \times \frac{1-e^{n+1}}{1-e} \qquad \text{car} \quad e \neq 1$$

$$= e \times 1 \times \frac{1-e^{n+1}}{1-e}$$

$$= \frac{e(1-e^{n+1})}{1-e}$$

ADC 7

$\ast \quad \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4 \right) = (n+1)^4 - 0^4$ par télescopage

$$= (n+1)^4$$

ou

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4 \right) = \left(\cancel{1^4} - 0^4\right) + \left(\cancel{2^4} - \cancel{1^4}\right) + \left(\cancel{3^4} - \cancel{2^4}\right) + \cdots$$

$$+ \left(\cancel{n^4} - \cancel{(n-1)^4}\right) + \left((n+1)^4 - \cancel{n^4}\right)$$

$$= (n+1)^4.$$

$\ast \quad \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$

$= \ln(n+1) - \ln(2)$ par télescopage

ou

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) = \left(\cancel{\ln(3)} - \ln(2)\right) + \left(\cancel{\ln(4)} - \cancel{\ln(3)}\right) + \left(\cancel{\ln(5)} - \cancel{\ln(4)}\right)$$

$$+ \cdots + \left(\ln(\cancel{n}) - \ln(\cancel{n-1})\right) + \left(\ln(n+1) - \cancel{\ln(n)}\right)$$

$$= -\ln(2) + \ln(n+1).$$