TD – AN2

Suites réelles

Applications directes du cours

ADC 1 Dans chaque cas, donner les premiers termes de la suite jusqu'à u_3.

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$.

b) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2^n$.

c) $u_0 = 1$, $u_1 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$.

ADC 2 Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

ADC 3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 8 - 7u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 3 \times (-7)^n$.

ADC 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 8u_n - 2u_{n+1}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - (-4)^n$.

ADC 5

1. Donner le terme général de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de premier terme -3 et de raison 5.
2. Donner le terme général de la suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant 2}$ de premier terme 4 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

ADC 6 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$u_0 = 2, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 7.$$

ADC 7 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n.$$

ADC 8 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

ADC 9 Montrer que les suites suivantes admettent une limite que l'on précisera.

1. $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2-1}$;
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$;
3. $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{n^5 + 3^n}$

ADC 10 Montrer que les suites suivantes admettent une limite que l'on précisera.

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;
2. $u_n = (-1)^n - \ln(n)$;
3. $u_n = \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercices

Exercice 1 Soit $x \geqslant -1$ un réel fixé. Démontrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $(1+x)^k \geqslant 1 + kx$.

Exercice 2 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Préciser sa valeur.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Déterminer les termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Étudier le sens de variation de u.
3. Montrer que u est convergente. Déterminer la valeur de sa limite ℓ.

Exercice 4 On considère la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$.

1. Étudier les variations de f.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe bien et que $u_n \leqslant -1$.
3. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer, par l'absurde, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Que dire alors de sa limite ?

Exercice 5 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 12$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = v_n - u_n$ est géométrique.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel.

Pour aller plus loin

Exercice 6

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1 + u_n} = 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1 + u_n^2} = 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Donner un contre-exemple à la question précédente dans le cas où (u_n) n'est pas bornée.

Exercice 7

1. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, $2\sqrt{ab} \leqslant a + b$.
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par $u_0 = 1 \in \mathbb{R}$, $v_0 = 2 \in \mathbb{R}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont bien définis et positifs et que $u_n \leqslant v_n$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 8 **Récurrence**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} + \dfrac{1}{u_n}$.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant 3^n - 1$.

2. Soit $a_n = (1 + 2\sqrt{2})^n + (1 - 2\sqrt{2})^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} - 7a_n = 2a_{n+1}$.
   (b) En déduire que a_n est un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n(1 - u_n)$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?