TD – AN2

Suites réelles

Corrigé des exercices

Exercice 1 Soit $x \geqslant -1$ un réel fixé.

Démontrons par récurrence (sur k) que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(1+x)^k \geqslant 1+kx$.

Initialisation : pour $k=0$, $(1+x)^0 = 1$ et $1+0\times x = 1$ donc on a bien $(1+x)^0 \geqslant 1+0\times x$.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $(1+x)^k \geqslant 1+kx$. Montrons que $(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x$. On a :

$$\begin{aligned} &(1+x)^k &&\geqslant 1+kx \\ \text{donc } &(1+x)^{k+1} &&\geqslant (1+kx)(1+x) \text{(on a multiplié par } 1+x \geqslant 0) \\ \text{donc } &(1+x)^{k+1} &&\geqslant 1+x+kx+kx^2 \\ \text{donc } &(1+x)^{k+1} &&\geqslant 1+(k+1)x+kx^2. \end{aligned}$$

Or, $kx^2 \geqslant 0$ donc $1+(k+1)x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x$ et donc

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x.$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(1+x)^k \geqslant 1+kx$.

Exercice 2

1. Notons $w_n = v_n - u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - u_{n+1} - v_n + u_n = 2u_n + 3v_n - 3u_n - 2v_n - v_n + u_n = 0$$

   Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et sa valeur est $w_0 = v_0 - u_0 = 1$.

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n - u_n = 1.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   $$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n = 3u_n + 2(1+u_n) = 5u_n + 2$$

   Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite arithmético-géométrique.}}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$x = 5x+2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

   Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_n + \frac{1}{2}$.

   $$t_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 5u_n + 2 + \frac{1}{2} = 5\left(t_n - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} = 5t_n.$$

   Ceci montre que la suite (t_n) est géométrique de raison 5 et de premier terme $t_0 = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. On en déduit que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \frac{3}{2} \times 5^n.$$

   Or, $u_n = t_n - \frac{1}{2}$, donc

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}.}$$

   De plus, $v_n = 1 + u_n$, donc

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{3}{2} \times 5^n + \frac{1}{2}.}$$

Exercice 3

1. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

   Initialisation : $u_0 = 0$ existe et on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   Alors $2 + u_n \geqslant 0$, donc $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ existe. De plus,

   $$u_n \leqslant 2 \text{ donc } u_n + 2 \leqslant 4 \text{ donc } 0 \leqslant \sqrt{u_n+2} \leqslant 2$$

   par stricte croissance de la fonction racine carrée. Ainsi, on a bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

   Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On utilise la quantité conjuguée : $a-b = \dfrac{(a-b)(a+b)}{a+b} = \dfrac{a^2-b^2}{a+b}$. *Cela permet de supprimer, au numérateur, la racine carrée sur notre a ici.*

   $$u_{n+1}-u_n = \sqrt{2+u_n}-u_n = \frac{(\sqrt{2+u_n}-u_n)(\sqrt{2+u_n}+u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n} = \frac{(\sqrt{2+u_n})^2-(u_n)^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n} = \frac{2+u_n-(u_n)^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n}.$$

   Or $\sqrt{2+u_n} + u_n > 0$ car $u_n \geqslant 0$. Il reste a étudier le signe de $2 + u_n - (u_n)^2$.
   Posons $x = u_n$. $2 + u_n - (u_n)^2 = 2 + x - x^2 = -x^2 + x + 2$.
   Le discriminant est $\Delta = 9 > 0$. Les racines du trinôme sont

   $$x_1 = \frac{-1-3}{-2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+3}{-2} = -1.$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Or ici, $x = u_n \in [0,2]$ donc $2 + u_n - (u_n)^2 \geqslant 0$. On en déduit que

   $$u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$$

   Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

3. **À savoir refaire !!**
   La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ.
   Déterminons ℓ.

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ donc par passage à la limite dans cet encadrement,

     $$0 \leqslant \ell \leqslant 2.$$

   - De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ (même limite que (u_n)) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2+u_n} = \sqrt{2+\ell}$ car $2 + \ell \in \mathbb{R}_+$. On en déduit que

     $$\ell = \sqrt{2+\ell}$$

     donc (tous les nombres sont positifs)

     $$\ell^2 = 2 + \ell \text{ donc } \ell^2 - \ell - 2 = 0 \text{ donc (équation déjà résolue en 1) } \ell = -1 \text{ ou } \ell = 2.$$

   De ces deux points, on déduit que $\ell = 2$.

Exercice 4 On considère la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$.

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par somme.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
   $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$
   Or $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

   Remarque : on aurait pu remarque que f est impaire.

2. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe bien et que $u_n \leqslant -1$.

   Initialisation : $u_0 = -1$ existe et on a bien $u_0 \leqslant -1$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $u_n \leqslant -1$.
   Alors $u_n \neq 0$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. De plus,
   $$u_n \leqslant -1 \text{ donc } f(u_n) \leqslant f(-1)$$
   par croissance de la fonction f sur $]-\infty, -1]$. Ainsi, on a $u_{n+1} \leqslant -2$ et donc $u_{n+1} \leqslant -1$.

   Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \leqslant -1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $$u_{n+1} - u_n = u_n + \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{1}{u_n}.$$
   Or $u_n < 0$ d'après la question 2, donc $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est décroissante.

4. Supposons, par l'absurde, que (u_n) converge. Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$.

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant -1$ donc par passage à la limite dans cette inégalité,
   $$\ell \leqslant -1.$$
   - De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right) = \ell + \dfrac{1}{\ell}$ car $\ell \in \mathbb{R}^*$. On en déduit que
   $$\ell = \ell + \frac{1}{\ell} \text{ donc } 0 = \frac{1}{\ell}$$
   ce qui est impossible.

   On a obtenu une contradiction. Ceci signifie que l'hypothèse de départ est fausse : (u_n) diverge.

   De plus, (u_n) étant décroissante, le théorème de la limite monotone nous dit que :

   - soit (u_n) converge ;
   - soit $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

   Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice 5 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 12$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{6} = \frac{1}{6}w_n,$$
donc la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $w_0 = 10$. Son terme général est
$$w_n = 10 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} = \dfrac{w_n}{2} \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante.
$v_{n+1} - v_n = -\dfrac{w_n}{3} \leqslant 0$ donc (v_n) est décroissante.

3. Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. L'une est croissante, l'autre décroissante et
$$v_n - u_n = w_n = 10 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
car $\frac{1}{6} \in]-1, 1[$. Donc (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers un même réel.