TD AN2 : Corrigé des ADC

ADC 1

a) $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{2}{3}$, $u_2 = \frac{3}{5}$, $u_3 = \frac{4}{7}$

b) $u_0 = 2$, $u_1 = u_0 + 2^0 = 3$, $u_2 = u_1 + 2^1 = 5$, $u_3 = u_2 + 2^2 = 9$

c) $u_0 = 1$, $u_1 = -2$, $u_2 = 2u_0 - u_1 = 4$, $u_3 = 2u_1 - u_2 = -8$

ADC 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{n+1-2n}{2^{n+1}} = \frac{1-n}{2^{n+1}}$$

Or $n \geqslant 1$ donc $1-n \leq 0$ et $2^{n+1} > 0$

Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

ADC3

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 3\times(-7)^n$.

Initialisation : $u_0 = 4$ et $1 + 3\times(-7)^0 = 1 + 3\times 1 = 4$

donc $u_0 = 1 + 3\times(-7)^0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1 + 3\times(-7)^n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 8 - 7u_n \\ &= 8 - 7\left(1 + 3\times(-7)^n\right) \\ &= 8 - 7 - 7\times 3\times(-7)^n \\ &= 1 + 3\times(-7)\times(-7)^n \\ &= 1 + 3\times(-7)^{n+1} . \end{aligned}$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a :

$u_n = 1 + 3\times(-7)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ADC 4

Démontrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2^n - (-4)^n.$$

Initialisation : $u_0 = 0$ et $2^0 - (-4)^0 = 1 - 1 = 0$ donc $u_0 = 2^0 - (-4)^0$

$u_1 = 6$ et $2^1 - (-4)^1 = 2 - (-4) = 2 + 4 = 6$ donc

$$u_1 = 2^1 - (-4)^1.$$

La propriété est vérifiée aux rangs $n=0$ et $n=1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $u_n = 2^n - (-4)^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} - (-4)^{n+1}$

Montrons que $u_{n+2} = 2^{n+2} - (-4)^{n+2}$

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 8u_n - 2u_{n+1} \\
&= 8(2^n - (-4)^n) - 2(2^{n+1} - (-4)^{n+1}) \\
&= 8 \times 2^n - 8 \times (-4)^n - 2 \times \underbrace{2^{n+1}}_{= 2 \times 2^n} + 2 \times \underbrace{(-4)^{n+1}}_{= (-4) \times (-4)^n} \\
&= 2^n (8 - 2 \times 2) + (-4)^n (-8 + 2 \times (-4)) \\
&= 2^n \times 4 + (-4)^n \times (-16) \\
&= 2^n \times 2^2 - (-4)^n \times (-4)^2 \\
&= 2^{n+2} - (-4)^{n+2}
\end{aligned}$$

Conclusion : Par récurrence double, on a :

$$u_n = 2^n - (-4)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

ADC5

1) $u_n = -3 + 5(n-1)$ car $u_1 = -3$

2) $u_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ car $u_2 = 4$

$= \frac{2^2}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-4}}$

ADC 6

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético - géométrique.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. $x = -2x + 7 \iff 3x = 7 \iff x = \frac{7}{3}$
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{7}{3}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{7}{3}$$
$$= -2u_n + 7 - \frac{7}{3}$$
$$= -2\left(v_n + \frac{7}{3}\right) + \frac{14}{3}$$
$$= -2v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison -2 et de 1^{er} terme $v_0 = u_0 - \frac{7}{3} = 2 - \frac{7}{3} = -\frac{1}{3}$.

- On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{1}{3} \times (-2)^n$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} - \frac{(-2)^n}{3}}$

ADC 7

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

(EC) : $x^2 = 6x - 9 \iff x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta = 0$, (EC) a une racine réelle, $r_0 = 3$

D'après le cours, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu)\, 3^n.$$

Or

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 2 \\ 3\lambda + 3\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(2 - \frac{5n}{3}\right) 3^n}$

ADC 8

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

(EC) : $x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 5 > 0$. (EC) a deux racines réelles

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

D'après le cours, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Or

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \sqrt{5}\mu = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$

ADC 9

1) $$u_n = \frac{n^2+1}{2n^2+1} = \frac{n^2(1+1/n^2)}{2n^2\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

2) $$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

3) $$u_n = \frac{2^n - 3^n}{n^5 - 3^n} = \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)}{3^n\left(\frac{n^5}{3^n} - 1\right)} = \frac{(2/3)^n - 1}{n^5/3^n - 1}$$

Or $\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$

et $\frac{n^5}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

ADC 10

1) * Méthode 1

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

donc $$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

* Méthode 2

$$|u_n| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{|-1|^n}{n} = \frac{1^n}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

* Méthode 3

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

$$u_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{2n} \quad \text{car } 2n \text{ est pair}$$

$$u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{-1}{2n+1} \quad \text{car } 2n+1 \text{ est impair.}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

2) $u_n = (-1)^n - \ln(n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(-1)^n \leq 1$$

Donc

$$(-1)^n - \ln(n) \leq 1 - \ln(n)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \ln(n)\right) = -\infty$.

Par majoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3) $u_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$

$= \exp\left(n \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right)$

or $\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2) > 0$ donc $n\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

Par composée, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.