

TD – AN2

ÉTUDE DE FONCTIONS

Applications directes du cours

ADC 1 On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2 - 2x - 6$ et $g : x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x}$.
Donner l'expression des composées $f \circ g$ et $g \circ f$.

ADC 2 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$1. f : x \mapsto x^2 + 7x^4 \quad 2. f : x \mapsto \frac{2x+3}{x+7} \quad 3. f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)} \quad 4. f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$$

ADC 3 Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \ln(4-x^2)$ et étudier la parité de f .

ADC 4 Calcul de dérivées : Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant, d'abord, l'ensemble de dérivabilité.

1. Fonctions usuelles, Sommes

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f : x \mapsto 2x^2 + 3x^4 - 5 & \text{(c)} f : x \mapsto 8 \ln(x) + \sqrt{x} & \text{(e)} f : x \mapsto x^{3/2} \\ \text{(b)} f : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \text{(d)} f : x \mapsto x^3 - \frac{6}{x} & \text{(f)} f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

2. Produits

$$\text{(a)} f : x \mapsto x \ln(x) \quad \text{(b)} f : x \mapsto x^2 e^x \quad \text{(c)} f : x \mapsto e^{3x}(\sqrt{x} + 2x)$$

3. Quotients

$$\text{(a)} f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x - 3} \quad \text{(b)} f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{(c)} f : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{x^2 + 1}$$

4. Composées

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f : x \mapsto e^{x^2} & \text{(c)} f : x \mapsto \ln(3x + 5) & \text{(e)} f : x \mapsto (e^{-2x} + 3x^2)^5 \\ \text{(b)} f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}} & \text{(d)} f : x \mapsto \sqrt{e^x - 3} & \text{(f)} f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)} \end{array}$$

5. Divers

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f : x \mapsto x e^{1-x^3} & \text{(c)} f : x \mapsto (2x + 5)^{10} & \text{(e)} f : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x - 1}\right) \\ \text{(b)} f : x \mapsto \frac{x + 3}{x e^{-x}} & \text{(d)} f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}} & \end{array}$$

ADC 5 Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x :

$$1. x^3 + 1 \leq 0 \quad 2. \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x^2+2}$$

Exercices

Exercice 1 Démontrer : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$.

Exercice 2 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier les variations de f .
3. On considère la droite $\Delta : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. Déterminer la position relative de \mathcal{C}_f et Δ .
4. Représenter l'allure de la courbe de f et de Δ .
5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 1$ puis démontrer le résultat.

Exercice 3 Dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto x^x$.

Exercice 4 On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Montrer que f est impaire.
3. Étudier les variations de f .

Exercice 5 Résoudre l'inéquation $\sqrt{x+1} > x$ d'inconnue réelle x .

Pour aller plus loin

Exercice 6 Résoudre $|2x + 1| \geq x - 3$

Exercice 7 On pose $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$. On pourra faire deux cas, suivant le signe de x .
2. Justifier que f définie et dérivable sur \mathbb{R} .
3. Montrer que f est impaire.
4. Dresser le tableau de variation de f .