TD – AN1

ÉTUDE DE FONCTIONS

Exercice 6 $\boxed{|2x+1| \geqslant x-3}$

Ensemble de définition : $\mathbb{R}$.

Premier cas : si $2x+1 \geqslant 0$ (c'est-à-dire $x \geqslant -\frac{1}{2}$)

$$|2x+1| \geqslant x-3 \Longleftrightarrow 2x+1 \geqslant x-3 \Longleftrightarrow x \geqslant -4$$

Ici l'ensemble des solutions est $S_1 = [-\frac{1}{2}, +\infty[$.

Second cas : si $2x+1 < 0$ (c'est-à-dire $x < -\frac{1}{2}$)

$$|2x+1| \geqslant x-3 \Longleftrightarrow -(2x+1) \geqslant x-3 \Longleftrightarrow -3x \geqslant -2 \Longleftrightarrow x \leqslant \frac{2}{3}$$

Ici l'ensemble des solutions est $S_2 =]-\infty, -\frac{1}{2}[$.

Conclusion : L'ensemble des solutions est $S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$

Exercice 7 On pose $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} - x > 0$. *On pourra faire deux cas, suivant le signe de x.*

   Ensemble de définition : $x \mapsto x^2+1$ et $x \mapsto x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ (polynomiales) et $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. Par composée puis différence, $x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2+1 \geqslant 0\} = \mathbb{R}$.

   Premier cas : si $x \leqslant 0$, on a $-x \geqslant 0$ et $\sqrt{x^2+1} > 0$ donc $\sqrt{x^2+1} - x > 0$.

   Second cas : si $x \geqslant 0$.

   $$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} - x > 0 &\Longleftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x \geqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow (\sqrt{x^2+1})^2 > x^2 \quad \text{cas la fonction carré est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &\Longleftrightarrow x^2+1 >^2 \\ &\Longleftrightarrow 1 > 0 \end{aligned}$$

   Puisque la dernière inégalité est vraie, celle de départ aussi, c'est-à-dire $\sqrt{x^2+1} - x > 0$.

   Conclusion : pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} - x > 0$

2. Justifier que f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   $x \mapsto x^2+1$ et $x \mapsto x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ (polynomiales) et $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, pour tout réel x, $x^2+1 \in \mathbb{R}_+^*$.
   Par composée puis différence, $x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   De plus, ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} - x \in \mathbb{R}_+^*$. Par composée, f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est impaire.

   L'ensemble de définition de f $(_R)$ est centré en 0.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$$
   Il n'est pas évident que $f(-x) = -f(x)$. Pour le montrer, calculons $f(-x)+f(x)$ (et montrons que cette quantité est nulle).
   $$\begin{aligned} f(-x)+f(x) &= \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + \ln(\sqrt{x^2+1}-x) \\ &= \ln\left((\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)\right) \\ &= \ln\left(x^2+1-x^2\right) \\ &= \ln(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$
   donc $f(-x) = -f(x)$ et f est impaire.

4. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

   Remarque : celle en $-\infty$ est plus simple (pas de F.I.)
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ par composée simple et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$. Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$
   Puisque f est impaire,
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

5. Dresser le tableau de variation de f.

   Pour tout réel x, en notant $u(x) = \sqrt{x^2+1}-x$,
   $$u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$
   Puis,
   $$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 0$$
   donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$