

## TD – AN1

## ÉTUDE DE FONCTIONS

## Applications directes du cours

**ADC 1** On considère la fonction  $f : x \mapsto x^2 - 2x - 6$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

- Déterminer l'image de  $-1$  par  $f$ .
- Déterminer les éventuels antécédents de  $2$  par  $f$ .
- Dresser le tableau de variation et le tableau de signe de  $f$ .
- Tracer l'allure de la courbe de  $f$  et faire apparaître les réponses précédentes.

**ADC 2** Soit  $g : x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ . Démontrer que pour tout  $x > 0$ ,

$$g(x) = 2 \times \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right).$$

En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

**ADC 3** Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{e^{\ln(3)} + \exp(5)^2 - 3}{e^7 \times \exp(-2)} \quad ; \quad B = \ln \left( (e + e^{-1})^2 + e(\exp(1) + \exp(-3)) \right).$$

**ADC 4** On considère les fonctions  $f : x \mapsto x^2 - 2x - 6$  et  $g : x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ .

Donner l'expression des composées  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

**ADC 5** Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto x^2 + 7x^4$
- $f : x \mapsto \frac{2x+3}{x+7}$
- $f : x \mapsto x \ln(x)$
- $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$

**ADC 6** Déterminer l'ensemble de définition de  $f : x \mapsto \ln(4 - x^2)$  et étudier la parité de  $f$ .

**ADC 7** Étudier les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - e^x)$ .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - e^x)$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x)$ .
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x+1}{4-x^2}$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ .

**ADC 8** Calculer la dérivée des fonctions suivantes (on cherchera d'abord l'ensemble de dérivabilité) :

- $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ .
- $f : x \mapsto (2x+5)^{10}$ .
- $f : x \mapsto \exp(\sqrt{x})$ .
- $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 1)$ .
- $f : x \mapsto \frac{e^{2x}}{x^2 + 1}$ .
- $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ .

**ADC 9** Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle  $x$  :

$$1. \frac{x-1}{x+1} < \frac{2}{x-1} \qquad 2. x^3 + 1 \leq 0 \qquad 3. \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x^2+2}$$

**ADC 10** Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle  $x$  :

$$1. |x+1| < 4 \qquad 2. |2x+3| > 6$$

**ADC 11** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\left|x + \frac{3}{4}\right| = 2$ .

## Exercices

**Exercice 1** Démontrer :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ .

**Exercice 2** Commenter la démonstration suivante :

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

**Exercice 3** On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les variations de  $f$ .
4. On considère la droite  $\Delta : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ . Déterminer la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $\Delta$ .
5. Représenter l'allure de la courbe de  $f$  et de  $\Delta$ .
6. Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) \geq 1$  puis démontrer le résultat.

**Exercice 4** 1. Démontrer que pour tout réel  $x > 0$ ,

$$e^x \geq \frac{x^2}{2}.$$

2. En déduire une démonstration de la croissance comparée  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

**Exercice 5** Résoudre l'inéquation  $\sqrt{x+1} > x-1$  d'inconnue réelle  $x$ .

## Pour aller plus loin

**Exercice 6** Résoudre  $|2x+1| \geq x-3$

**Exercice 7** On pose  $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ .

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{x^2+1} - x > 0$ . On pourra faire deux cas, suivant le signe de  $x$ .
2. Justifier que  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $f$  est impaire.
4. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
5. Dresser le tableau de variation de  $f$ .