TD1 - AN1
Corrigé des exercices

Exercice 1

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \iff 2ab \leq a^2+b^2$$
$$\iff a^2+b^2-2ab \geq 0$$
$$\iff (a-b)^2 \geq 0$$

Puisque $(a-b)^2 \geq 0$ est vraie, par équivalence,

$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ est vraie également.

Exercice 3

1) f est rationnelle, définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{2}\}.$$

2) • Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1} = \frac{x^2}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{2-\frac{1}{x}}$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to 1/2} x^2 = \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} (2x-1) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} (2x-1) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$

3) f est rationnelle donc dérivable sur son domaine de définition.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

Or $(2x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x(x-1) = 2x^2 - 2x$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 0$

$f(1) = \frac{1}{2-1} = 1$

4) Position relative : on étudie le signe de $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{x^2}{2x-1} - \frac{2x+1}{4} = \frac{4x^2 - (2x+1)(2x-1)}{4(2x-1)}$$

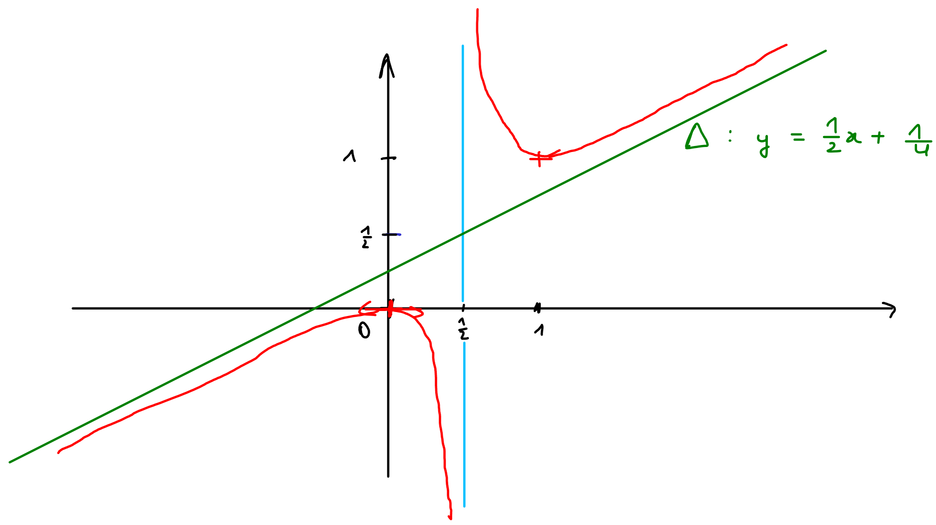
$$= \frac{1}{4(2x-1)}$$

$\frac{1}{4} > 0$ donc $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$ est du signe de $2x - 1$.

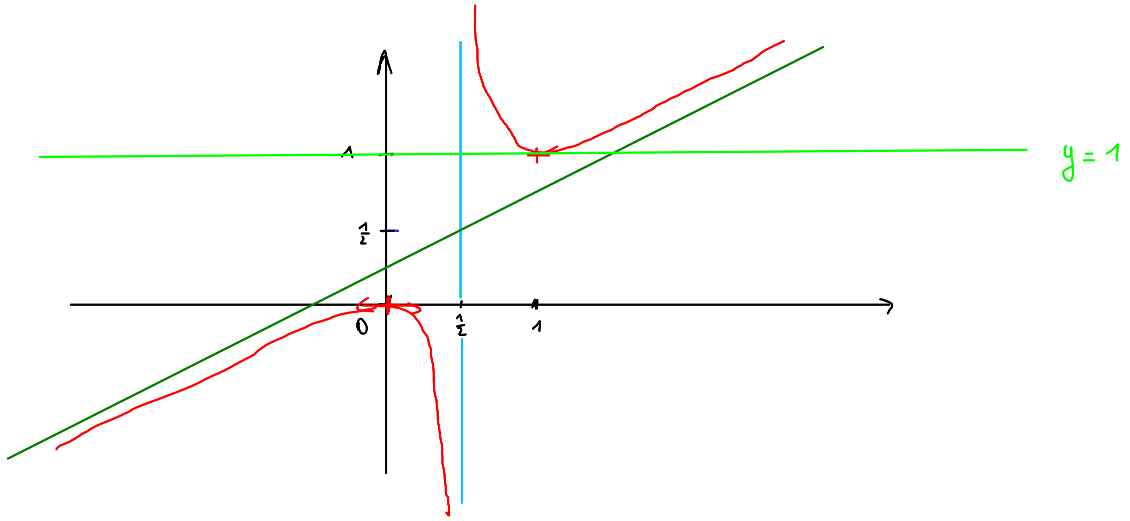
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$		$-$	$\Vert$	$+$	

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ sur $]-\infty, 1/2[$ et au dessus sur $]1/2, +\infty[$.

5)



6)



Graphiquement, $f(x) \geq 1$ sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

<u>Calcul</u> : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$$f(x) \geq 1 \iff \frac{x^2}{2x-1} - 1 \geq 0 \iff \frac{x^2-2x+1}{2x-1} \geq 0 \iff \frac{(x-1)^2}{2x-1} \geq 0$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{(x-1)^2}{2x-1}$		$-$	||	$+$	0	$+$	

Donc $f(x) \geq 1$ pour $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Exercice 6

1) Posons $f : x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

exp et $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f aussi.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x - x$$

Sans le cours : signe pas clair, on redérive

Rq : le cours donne : $e^x \geq x$ $\forall x \in \mathbb{R}$. On va le démontrer ici

$x \mapsto f'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme et pour tout réel x

$$f''(x) = e^x - 1$$

Or $e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variation f'		$\searrow$	1	$\nearrow$	
signe $f'(x)$			$+$		
variation f		$\nearrow$	1	$\nearrow$	

$f'(0) = e^0 - 0 = 1$

$\rightarrow$ ceci montre $e^x - x \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(0) = e^0 - 0 = 1$

Pour $x > 0$, $f(x) \geq 1$ donc $e^x - \dfrac{x^2}{2} \geq 0$

$$\boxed{e^x \geq \frac{x^2}{2}}$$

2) Soit $x > 0$, $e^x \geq \dfrac{x^2}{2}$

donc $\dfrac{e^x}{x} \geq \dfrac{x}{2}$ car $\dfrac{1}{x} > 0$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$. D'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

Exercice 5

* Ensemble de définition :

$x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x-1$ sont définies sur $\mathbb{R}$,
$x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0,+\infty[$.

Le domaine de définition est $\{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \geq 0\} = [-1,+\infty[$.

* Soit $x \in [-1,+\infty[$.

* Cas 1 : si $x-1 \geq 0$, ie $x \in [1,+\infty[$

$$\sqrt{x-1} > x-1 \geq 0 \iff (\sqrt{x-1})^2 \geq (x-1)^2$$ car $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

$$\iff x-1 \geq x^2-2x+1$$

$$\iff 0 \geq x^2-3x+2$$

$\Delta = 1 > 0$, les solutions de $x^2-3x+2=0$ sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

⚠ on est sur $[1,+\infty[$

Les $x \in [1,2]$ sont les solutions dans ce cas.

* Cas 2 : si $x-1 < 0$, ie $x \in [-1,1[$

$\sqrt{x+1} \geq 0$ et $x-1 < 0$ donc $\sqrt{x+1} > x-1$ est vrai

Les $x \in [-1,1[$ sont tous solutions.

Conclusion : L'ensemble des solutions est $[1,2] \cup [-1,1[\; = [-1,2]$