# TD1 - AN1
# Corrigé des ADC

## ADC 1

1) $f(-1) = (-1)^2 - 2\times(-1) - 6 = 1+2-6 = -3$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = 2 \iff x^2 - 2x - 6 = 2$$
$$\iff x^2 - 2x - 8 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times(-8) = 36 > 0$

Les solutions sont donc $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{36}}{2} = -2$

et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{36}}{2} = 4$

Les antécédents de 2 par $f$ sont $-2$ et $4$.

3) $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1 > 0$
$b = -2$
$c = -6$.

$f$ admet un minimum en $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$, qui vaut $f(1) = -7$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-7$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Le discriminant de $f$ est $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times(-6) = 28$

Les solutions de $f(x) = 0$ sont $a_1 = \dfrac{2-\sqrt{28}}{2} = 1-\sqrt{7}$

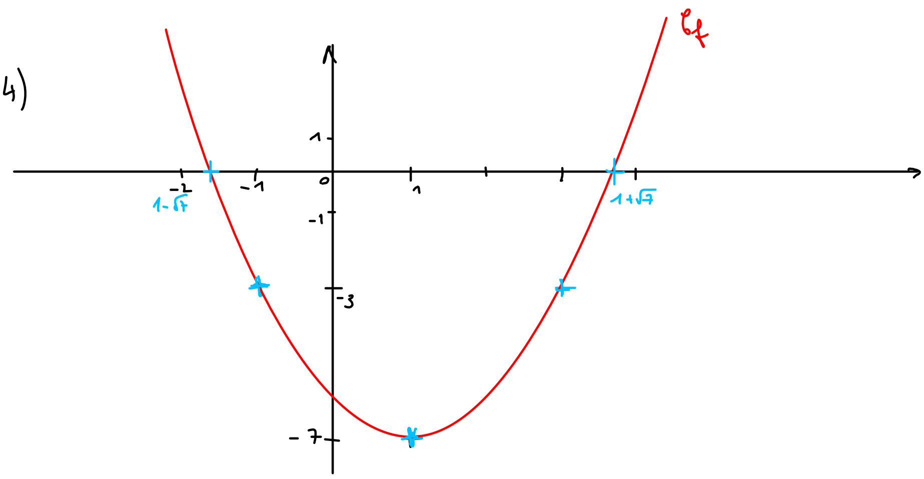
et $a_2 = 1+\sqrt{7}$

car $\sqrt{28} = \sqrt{4\times7}$
$= \sqrt{4}\times\sqrt{7}$
$= 2\sqrt{7}$

| $x$ | $-\infty$ | | $1-\sqrt{7}$ | | $1+\sqrt{7}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$2 = \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$
$-2 < 1-\sqrt{7} < -1$
$3 < 1+\sqrt{7} < 4$

4)



## ADC2

Soit $x>0$

$$g(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{\ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right)}{x}$$

$$= \frac{\ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{x}$$

$$= \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée

$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1$ donc $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

## ADC3

$$A = \frac{e^{\ln(3)} + \exp(5)^2 - 3}{e^7 \times \exp(-2)} = \frac{3+(e^5)^2-3}{e^7\times e^{-2}} = \frac{e^{10}}{e^5} = e^5$$

$$B = \ln\left((e+e^{-1})^2 + e\left(\exp(1)+\exp(-3)\right)\right) = \ln\left(e^2+2e\times e^{-1}+e^{-2} - e(e+e^{-3})\right)$$

$$= \ln\left(e^2+2+e^{-2}+e^2+e^{-2}\right)$$

$$= \ln(2(e^2+e^{-2}+1))$$

$$= \ln(2) + \ln(e^2+e^{-2}+1)$$

## ADC6

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right) = \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right) - 6$$

$$= \frac{\ln(1+x^2)^2}{x^2} - \frac{2\ln(1+x^2)}{x} - 6$$

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2-2x-6) = \frac{\ln(1+(x^2-2x-6)^2)}{x^2-2x-6}$$

$$= \frac{\ln(x^4-4x^3-8x^2+24x+37)}{x^2-2x-6}$$

ADCS

1) $f : x \mapsto x^2 + 7x^4$ est polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+7}$ est rationnelle. Elle est définie sur

$$\mathcal{D}_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid x+7 \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \{-7\}.$$

3) $f : x \mapsto x \ln(x)$

$x \mapsto x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$. Par produit, $f$ est définie sur $]0, +\infty[$.

4) $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$

$x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$. Par composition, $f$ est définie sur :

$$\mathcal{D}_f = \{ x \in ]0, +\infty[ \mid \ln(x) \in [0, +\infty[ \}$$
$$= [1, +\infty[$$

car :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

ADC6

- $x \mapsto 4-x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ (polynomiale) et $\ln$ sur $]0,+\infty[$.
  Par composée, $x \mapsto \ln(1-x^2)$ est définie sur
  $$\{x \in \mathbb{R} \mid 4-x^2>0\} = ]-2,2[$$
  car

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Par somme, <u>$f$ est définie sur $]-2,2[$.</u>

* . $]-2,2[$ est symétrique par rapport à $0$.

. Soit $x \in ]-2,2[$

$$f(-x) = \ln(4-(-x)^2)$$
$$= \ln(4-x^2)$$
$$= f(x)$$

Donc <u>$f$ est paire</u>.

# ADC 7

1) F.I « $\infty - \infty$ » $\to$ on factorise par le terme dominant

Soit $x>0$

$$3x^2 - e^x = e^x\left(3\frac{x^2}{e^x} - 1\right)$$

F.I « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ par croissance comparée

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\frac{x^2}{e^x} - 1\right) = -1$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2 - e^x\right) = -\infty \quad \text{par produit.}$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2 - e^x\right) = +\infty$

F.I « $0\times\infty$ » 3) $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln(x) = 0$ par croissance comparée

4) $\lim\limits_{x\to2^-}(5x+1) = 11$

$4-x^2 = (2-x)(2+x)$

$\lim\limits_{x\to2^-}(4-x^2) = 0^+$ car

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ ($2^-$) | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Donc, par quotient

$$\lim_{x\to2^-}\frac{5x+1}{4-x^2} = +\infty$$

5) ⚠ Puissance variable $\to$ forme exponentielle

$$x^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right) = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

F.I « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée

De plus $\lim\limits_{x\to0} e^x = 1$ donc par composée

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1.$$

# ADC 8

1) $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc par quotient,

$f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ est dérivable sur :

$$\{x \in ]0,+\infty[ \mid \ln(x) \neq 0\} = ]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

Pour tout $x \in ]0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1/x}{\ln(x)^2} = -\frac{1}{x\ln(x)^2}$$

2). $f : x \mapsto (2x+5)^{10}$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

ou $x \mapsto 2x+5$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto x^{10}$ est également polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par composée, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 10 \times 2 \times (2x+5)^9 = 20\,(2x+5)^9 \qquad (u^{10})' = 10\,u'\,u^9$$

3) $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$x \mapsto \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par composée, $f : x \mapsto \exp(\sqrt{x})$ est dérivable sur

$$\{x \in ]0,+\infty[ \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = ]0,+\infty[.$$

$\forall x > 0, \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \exp(\sqrt{x})$

4) $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$x \mapsto 3x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est polynomiale.

De plus $3x^2+1 \geq 1 > 0$ pour tout réel $x$.

Par composée, $f : x \mapsto \ln(3x^2+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\qquad f'(x) = \dfrac{6x}{3x^2+1}$

5) $x \mapsto e^{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynomiale) et pour tout réel $x$

$$x^2+1 \neq 0$$

Par quotient, $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(x^2+1) - 2xe^{2x}}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2e^{2x}(x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}$$

6) $x^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)$ ⚠ Puissance variable → forme exp.

$x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Par produit, $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

De plus $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée,

$f : x \mapsto x^{1/x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Soit $x>0$, $f(x) = \exp(u(x))$

avec $u(x) = \frac{1}{x}\ln(x)$. $u'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x}\times\frac{1}{x} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

$$f'(x) = u'(x)\exp(u(x))$$

$$= \frac{1-\ln(x)}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)$$

$$= \frac{1-\ln(x)}{x^2}x^{1/x}$$

# ADC 9

1) $\dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{2}{x-1}$

- <u>Domaine de définition</u> : $x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$ sont rationnelles. Le domaine de définition est :

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x+1 \neq 0 \text{ et } x-1 \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{2}{x-1} \iff \frac{x-1}{x+1} - \frac{2}{x-1} < 0$$

$$\iff \frac{(x-1)^2 - 2(x+1)}{(x+1)(x-1)} < 0$$

$$\iff \frac{x^2-4x-1}{(x+1)(x-1)} < 0$$

$x^2 - 4x - 1$ : $\Delta = 16 + 4 = 20$ $\quad\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$

racines : $\dfrac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5}$ et $2 + \sqrt{5}$

<u>Tableau de signe</u> :

$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2-\sqrt{5}$ | | $1$ | | $2+\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4x-1$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x+1)(x-1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{x^2-4x-1}{(x+1)(x-1)}$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

L'ensemble des solutions est : $]-1, 2-\sqrt{5}[ \;\cup\; ]1, 2+\sqrt{5}[$

2) - $x \mapsto x^3 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$

$$x^3 + 1 \leq 0 \iff x^3 \leq -1$$

$$\iff x^3 \leq (-1)^3$$

$$\iff x \leq -1$$ car $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) • $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto x^2+2$ sont définies sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0,+\infty[$.

Domaine de définition :

$x^2+2 \geq 0$.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \geq 0 \text{ et } x^2+2 \geq 0\} = [1,+\infty[$$

• Soit $x \geq 1$

$0 \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x^2+2} \iff x-1 \leq x^2+2$ car $x \mapsto x^2$ (ou $x \mapsto \sqrt{x}$) est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$\iff x^2-x+3 \geq 0$

$\Delta = 1-12 < 0$. donc $x^2-x+3 \geq 0$ est toujours vraie.

L'ensemble des solutions est $[1,+\infty[$.

## Exo 10

1) Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$|x+1| < 4 \iff -4 < x+1 < 4$

$\iff -5 < x < 3$

$\mathcal{S} = ]-5,3[$

2) Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$|2x+3| > 6 \iff 2x+3 > 6$ ou $2x+3 < -6$

$\iff 2x > 3$ ou $2x < -9$

$\iff x > \frac{3}{2}$ ou $x < -\frac{9}{2}$

$\mathcal{S} = ]-\infty, -\frac{9}{2}[ \cup ]\frac{3}{2}, +\infty[$.

## ADC 11

- $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et $x \mapsto x + \frac{3}{4}$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

  Domaine de définition : $\mathbb{R}$

- Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\left\lfloor x + \frac{3}{4} \right\rfloor = 2 \iff 2 \leq x + \frac{3}{4} < 3$$

$$\iff \frac{5}{4} \leq x < \frac{9}{4}$$

$$\mathcal{S} = \left[ \frac{5}{4}, \frac{9}{4} \right[$$