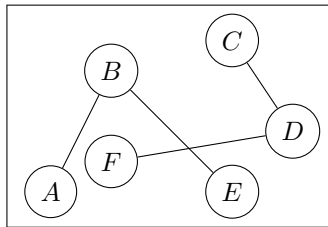
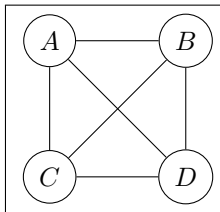
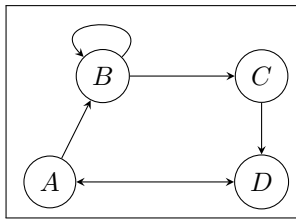
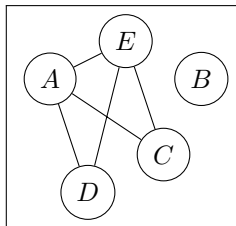


**TD – AL5**

**THÉORIE DES GRAPHES**

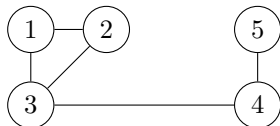
**Applications directes du cours**

**ADC 1** Pour chaque graphe, donner son ordre et le degré de ses sommets.



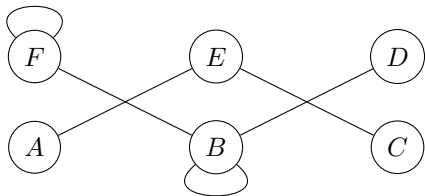
**ADC 2** En 2019, les 20 professeurs d’une prépa se sont rencontrés pour une réunion. Ils se sont tous serré la main. Combien de poignées de mains ont été serrées ?

**ADC 3** On considère le graphe non orienté suivant :

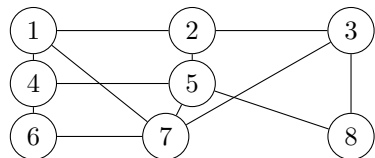


1. Écrire la matrice d’adjacence  $A$  de ce graphe.
2. Combien de chemins de longueur 4 y a-t-il entre les sommets 1 et 4 ? Lister ensuite ces chemins.
3. Démontrer par le calcul que ce graphe est connexe.

**ADC 4** Le graphe suivant est-il connexe ?



**ADC 5** Est-il possible de dessiner ce graphe sans lever le crayon et en passant une, et une seule fois, par chaque trait ?

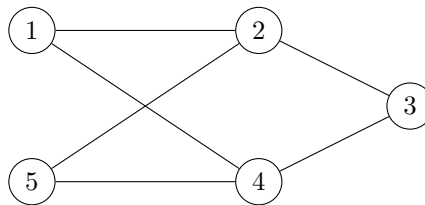


## Exercices

**Exercice 1** Une maison, construite sur un seul niveau, possède 18 ouvertures (portes et fenêtres). Chaque pièce a deux ouvertures sur l'extérieur et deux ouvertures sur l'intérieur. Combien de pièces cette maison possède-t-elle ?

**Exercice 2** Démontrer que dans un groupe de  $n$  personnes, il y en a toujours deux qui connaissent exactement le même nombre de membres du groupe.

**Exercice 3** On considère le graphe suivant :

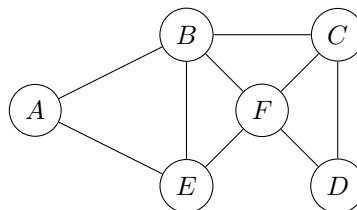


1. Écrire la matrice d'adjacence  $M$  de ce graphe.
2. Montrer que pour tout entier naturel  $k$ ,  $M^{2k+1} = 6^k M$ .
3. En déduire le nombre de chemins de longueur 5 allant du sommet 2 au sommet 3.

**Exercice 4** L'algorithme d'Euler consiste à déterminer dans n'importe quel graphe connexe une chaîne eulérienne. Il s'articule en quatre temps :

- Créer une chaîne simple entre deux sommets de degrés impairs.
- Tant que toutes les arêtes du graphe n'ont pas été utilisées, choisir un sommet quelconque de la chaîne précédente et trouver un cycle associé (partant de ce sommet et arrivant à ce sommet) ne contenant aucune des arêtes déjà utilisées.
- Insérer ce cycle en remplacement du sommet choisi à l'étape précédente.
- Recommencer ainsi de suite jusqu'à avoir utilisé toutes les arêtes.

On considère le graphe suivant :



1. Le graphe est-il connexe ?
2. Montrer qu'il possède au moins une chaîne eulérienne. Donner les deux seules extrémités possibles de cette chaîne.
3. Mettre en place l'algorithme d'Euler en partant des chaînes suivantes :
  - (a)  $E - F - D - C$  ;
  - (b)  $E - B - C$ .