

TD – AL5

APPLICATIONS

Applications directes du cours

ADC 1 Déterminer l'ensemble des antécédents de 4 puis de -1 par la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{3x+4}{x^2+1}$

ADC 2 Déterminer l'ensemble des antécédents de $(1, 2)$ par l'application

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, x + 2y - z)$$

ADC 3 Déterminer l'ensemble image $f(\mathbb{R})$ de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{3x+4}{x^2+1}$

ADC 4 En utilisant les ADC précédents : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ?
 $x \mapsto \frac{3x+4}{x^2+1}$
 bijective ?

ADC 5

1. L'application $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_1(x) = x^2 + 1$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. L'application $h_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_2(x) = x^2 + 1$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. L'application $h_3 : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty[$ définie par $h_3(x) = x^2 + 1$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

ADC 6 Montrer que la fonction $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est injective.
 $x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$

ADC 7 L'application $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\psi(n) = 3n+1$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

ADC 8 Montrer que l'application $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective. Est-elle injective ?
 $(x, y) \mapsto 2x + y$

ADC 9 Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est bijective et déterminer son application réciproque.
 $(x, y) \mapsto (2x - y, x - y)$
 Vérifier que $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Exercices

Exercice 1 Soient $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ et $g : x \mapsto -x$, définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Démontrer que

$$f - f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}}.$$

Exercice 2 Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4x - x^2 - 3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
2. Étudier la fonction f . On dressera son tableau de variation.

3. f est-elle injective de \mathcal{D}_f dans \mathbb{R} ? surjective de \mathcal{D}_f dans \mathbb{R} ? Quel est l'ensemble image de f ?
4. Montrer que la fonction $g: [1, 2] \rightarrow [0, 1]$
 $x \mapsto \sqrt{4x - x^2 - 3}$ est une bijection et préciser son application réciproque.

Exercice 3

On considère l'application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (3x - y, 2y - 6x)$

- Déterminer l'ensemble des antécédents de $(0, 0)$.
- Montrer, par double inclusion, que l'ensemble image de f est $\text{Im}(f) = \{(a, -2a), a \in \mathbb{R}\}$.
- L'application f est-elle injective? surjective? bijective? (de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2)

Pour aller plus loin

Exercice 4 Soient E, F et G trois ensembles, et $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux applications. Montrer les implications suivantes :

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective (mais g pas forcément).
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective (mais f pas forcément).

Exercice 5 Soient E et F deux ensembles et $f, g: E \rightarrow F$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.