

TD ALS - Applications
Corrigé des ADC

ADC 1

* f est rationnelle donc définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$.
car $x^2 + 1 \geq 1$ pour tout réel x .

* Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{3x+4}{x^2+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow 3x+4 = 4x^2+4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(4x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad 4x-3=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{4}$$

L'ensemble des antécédents de 4 par f est $\{0, \frac{3}{4}\}$

$$* \quad f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{3x+4}{x^2+1} = -1$$

$$\Leftrightarrow 3x+4 = -x^2-1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 = 0$$

de discriminant de $x^2 + 3x + 5$ est : $\Delta = -11 < 0$

Donc $x^2 + 3x + 5 = 0$ n'a pas de solution.

-1 n'a pas d'antécédent par f .

ADC2

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$g(u) = (1, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 3z = -3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = -1 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = z + 1 \\ x = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = (-z, z+1, z) \quad \text{avec } z \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des antécédents de $(1, 2)$ par g est

$$\{(-z, z+1, z), z \in \mathbb{R}\}$$

Rq : suivant les pivots choisis, on peut aussi obtenir :

$$\{(x, -x+1, -x), x \in \mathbb{R}\}$$

ou $\{(-y+1, y, y-1), y \in \mathbb{R}\}$

AD C3

* $f: x \mapsto \frac{3x+4}{x^2+1}$ est dérivable sur \mathbb{R} car elle est rationnelle et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in \mathbb{R}. \quad f'(x) &= \frac{3(x^2+1) - 2x(3x+4)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-3x^2 - 8x + 3}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Or $(x^2+1)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-3x^2 - 8x + 3$.

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times (-3) \times 3 = 64 + 36 = 100 > 0$$

$$\begin{aligned} -3x^2 - 8x + 3 = 0 \quad \text{a deux solutions : } x_1 &= \frac{8 - \sqrt{100}}{-6} = \frac{1}{3} \\ \text{et } x_2 &= \frac{8 + \sqrt{100}}{-6} = -3 \end{aligned}$$

On a donc

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$

$$* \text{ Soit } x \neq 0, \quad f(x) = \frac{3x+4}{x^2+1} = \frac{x(3 + \frac{4}{x})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{3 + \frac{4}{x}}{x(1 + \frac{1}{x^2})}$$

$\xrightarrow[\text{ou } x \rightarrow +\infty]{x \rightarrow -\infty}$ 0 par quotient

$$f(-3) = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2} \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{\frac{10}{3}} = \frac{9}{2}$$

* de tableau de variation de f on donc :

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
f	0	\searrow	\nearrow	\searrow	0
		$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$		

Ann: $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right]$

ADC6

D'après l'ADC1 :

→ 4 a deux antécédents par f donc f n'est pas injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

→ -1 n'a aucun antécédent par f donc f n'est pas surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On peut aussi citer l'ADC3 : $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$

→ f n'est donc pas bijective non plus.

ADC5

1) * $h_1(1) = 2 = h_1(-1)$ donc 2 a au moins deux antécédents par h_1 : h_1 n'est pas injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

* $h_1(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ ce qui est impossible

donc 0 n'a pas d'antécédent par h_1 : h_1 n'est pas surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

* h_1 n'est donc pas bijective.

2) * Soient $x, x' \in \mathbb{R}_+$.

$$h_2(x) = h_2(x') \Leftrightarrow x^2 + 1 = (x')^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (x')^2$$

$$\Leftrightarrow x = x' \quad \text{car } x \geq 0 \text{ et } x' \geq 0$$

Donc h_2 est injective de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} .

* Avec le même exemple que pour h_1 , h_2 n'est pas surjective, donc pas bijective, de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} .

3) Rq : on a bien $h_3(x) = x^2 + 1 \in [1, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

soit $y \in [1, +\infty[$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$h_3(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y - 1}$$

car $x \geq 0$ et $y - 1 \geq 0$. Donc $h_3(x) = y$ a une unique solution $x \in \mathbb{R}_+$ pour tout $y \in [1, +\infty[$: h_3 est bijective de \mathbb{R}_+ dans $[1, +\infty[$.

Elle est ainsi injective et surjective de \mathbb{R}_+ dans $[1, +\infty[$.

ADC 6

Méthode 1

f est rationnelle donc bien dérivable sur $]1, +\infty[$ car

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad x-1 \neq 0 .$$

Soit $x > 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-3}{(x-1)^2} < 0 \end{aligned}$$

donc f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

Ainsi f est injective de $]1, +\infty[$ dans \mathbb{R} .

Méthode 2

Soient $x, x' \in]1, +\infty[$.

$$f(x) = f(x') \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x'+1}{x'-1}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x'-1) = (2x'+1)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2xx'} - 2x + \cancel{x'} - \cancel{1} = \cancel{2xx'} - 2x' + \cancel{x} - \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow -3x = -3x'$$

$$\Leftrightarrow x = x'$$

Donc f est injective de $]1, +\infty[$ dans \mathbb{R} .