

TD – AL4

POLYNÔMES

Applications directes du cours

ADC 1 Soient $P(X) = X^2 + 3X - 2$ et $Q(X) = 6X - X^2 + 1$.

Déterminer $P(X) + Q(X)$, $3P(X) - 2Q(X)$, $P(X)^3$, $P(X)Q(X)$ et $P(Q(X))$.

ADC 2 Déterminer le degré des polynômes suivants :

1. $P_1(X) = X^3 - (X - 2)^2$
2. $P_2(X) = X^3 - X(X - 2)^2$
3. $P_3(X) = (X + 1)^{10} - (4X^2 + 1)^8$, sans développer.

ADC 3 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. $X^3 + 1$ par $X^2 + X + 1$
2. $2X^5 + X^3 + 17X - 2$ par $X^2 + 2X + 3$

ADC 4 Soit $P(X) = -4X^2 + 6X + 4$. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

ADC 5 Soit $P(X) = X^3 - X^2 - 14X + 24$.

Montrer que 2 est racine de P puis factoriser (au maximum) P dans $\mathbb{R}[X]$.

ADC 6 Résoudre le système $\begin{cases} a + b = -2 \\ ab = -15 \end{cases}$ d'inconnue $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercices

Exercice 1 1. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}_1[X]$ vérifiant : $P(-1) = -2$ et $P(0) = 1$.

2. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(-1) = -2$, $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$.

Exercice 2 On considère la fonction $f : x \mapsto x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 2$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $(x + 1)^3$ divise $f(x)$.
2. En déduire le tableau de signe de f sur \mathbb{R} .

Exercice 3 1. Factoriser $P_1(X) = X^3 + 3X^2 - 5X + 1$.

2. Factoriser $P_2(X) = X^4 - 5X^2 + 6$.

Exercice 4 On considère la fonction $g : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 9x + 18$.

1. Montrer que 2 est racine de g .
2. En déduire une factorisation de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre l'inéquation $e^{3x} - 2e^{2x} - 9e^x + 18 \geq 0$.

Pour aller plus loin

Exercice 5 Résoudre le système $\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ ab = 2 \end{cases}$ d'inconnue $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6 On considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\begin{cases} T_0(X) = 1, T_1(X) = 2X \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X) \end{cases}$$

1. Calculer $T_2(X)$ et $T_3(X)$.
2. Démontrer par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.

Exercice 7 Soit $R(X)$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X) = (X - 1)(X - 2)$. Que dire du degré de R ? Déterminer $R(1)$ et $R(2)$ puis en déduire R .