TD AL3 : Correction des exercices

Exercice 1

1) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$. $P = aX+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} P(-1) = -2 \\ P(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -a+b = -2 \\ b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{3X+1\}$.

2) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P = aX^2+bX+c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} P(-1) = -2 \\ P(0) = 1 \\ P(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a-b+c = -2 \\ c = 1 \\ a+b+c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a-b = -3 \\ c = 1 \\ a+b = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = b-3 \\ c = 1 \\ 2b-3 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 \\ c = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{-2X^2+X+1\}$

Exercice 2

1) $f(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 2.$

$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$

$$
\begin{array}{l|l}
\quad x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 2 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
\hline
-(x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2) & x^2 - x + 2 \\
\quad -x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2 & \\
-(-x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x) & \\
\quad 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 & \\
-(2x^3 + 6x^2 + 6x + 2) & \\
\quad 0 &
\end{array}
$$

Le reste est nul donc $(x+1)^3$ divise $f(x)$ et

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)^3\,(x^2 - x + 2)$

2) * $(x+1)^3$ a le même signe que $x+1$.

* $x^2 - x + 2$: $\Delta = 1 - 4\times 2 = -7 < 0$ donc $x^2 - x + 2 > 0$ pour tout réel x.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$(x+1)^3$		$-$	0	$+$	
x^2-x+2		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 3

1) $P_1 = X^3 + 3X^2 - 5X + 1$

* On cherche une racine évidente :

$P_1(1) = 1 + 3 - 5 + 1 = 0$ donc 1 est racine de P

* On en déduit que $X-1$ divise P..

$$
\begin{array}{rr|l}
 & X^3 + 3X^2 - 5X + 1 & X - 1 \\
\cline{3-3}
- & (X^3 - X^2) & X^2 + 4X - 1 \\
\cline{2-2}
 & 4X^2 - 5X + 1 & \\
- & (4X^2 - 4X) & \\
\cline{2-2}
 & -X + 1 & \\
- & (-X + 1) & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Donc $P = (X-1)(X^2 + 4X - 1)$.

$\Delta(X^2 + 4X - 1) = 20 = (2\sqrt{5})^2$.

$x_1 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} = -2 - \sqrt{5}$

$x_2 = -2 + \sqrt{5}$

Donc

$P = (X-1)(X - (-2-\sqrt{5}))(X - (-2+\sqrt{5})) = (X-1)(X + 2 + \sqrt{5})(X + 2 - \sqrt{5})$

2) $P_2 = X^4 - 5X^2 + 6$

Soit $Q = X^2 - 5X + 6$.

$\Delta(Q) = 25 - 24 = 1$. Les racines de Q sont 2 et 3

donc $Q = (X-2)(X-3)$

$P_2 = Q(X^2)$

$= (X^2 - 2)(X^2 - 3)$

$= (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})$

Exercice 4

1) $g(2) = 2^3 - 2\times 2^2 - 9\times 2 + 18 = 8 - 8 - 18 + 18 = 0$

donc 2 est racine de g.

2) D'après le cours, $(x-2)$ divise $g(x)$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 2x^2 - 9x + 18 & x-2 \\
\cline{2-2}
-(x^3 - 2x^2) & x^2 - 9 \\
\cline{1-1}
-9x + 18 & \\
-(-9x + 18) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x-2)(x^2-9)$

3) Posons $X = e^x$.

$e^{3x} - 2e^{2x} - 9e^x + 18 \geq 0 \iff X^3 - 2X^2 - 9X + 18 \geq 0$

$\iff g(X) \geq 0.$

Étudions le signe de g

x	$-\infty$		-3		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $g(X) \geq 0 \iff -3 \leq X \leq 2$ ou $X \geq 3$

$e^{3x} - 2e^{2x} - 9e^x + 18 \geq 0 \iff \underbrace{-3 \leq}_{\text{toujours vrai}} e^x \leq 2$ ou $e^x \geq 3$

$\iff x \leq \ln(2)$ ou $x \geq \ln(3)$

par stricte croissance de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$

L'ensemble des solutions est $]-\infty, \ln(2)] \cup [\ln(3), +\infty[$.