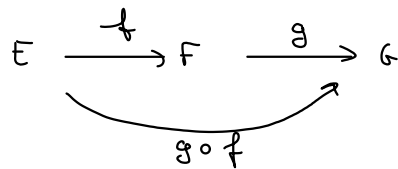


TD AL 5 - Applications.

Corrigé des PAPL

Exercice 4



1) On suppose f et g injectives.

Soient $u, u' \in E$ tels que $g \circ f(u) = g \circ f(u')$.

alors $g(f(u)) = g(f(u'))$

donc $f(u) = f(u')$ car g est injective

donc $u = u'$ car f est injective

Donc $g \circ f$ est injective.

2) On suppose que f et g sont surjectives.

Soit $w \in G$.

Puisque g est surjective de F dans G , il existe

$$v \in F \text{ tel que } g(v) = w$$

Puisque f est surjective de E dans F (et $v \in F$),

il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$

On a alors

$$w = g(v) = g(f(u)) = g \circ f(u)$$

Donc $g \circ f$ est surjective de E dans G .

3) On suppose que $g \circ f$ est injective.

* Soient $u, u' \in E$ tels que $f(u) = f(u')$

alors $g(f(u)) = g(f(u'))$

donc $g \circ f(u) = g \circ f(u')$

donc $u = u'$ car $g \circ f$ est injective.

* g n'est pas forcément injective.

Ex: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^x$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$
pas injective.

$$g \circ f(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$$

$g \circ f$ est strictement croissante sur \mathbb{R} donc injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sans que g soit injective.

4) supposons que $g \circ f$ est surjective de E dans G .

soit $w \in G$.

Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $u \in E$ tel que

$$g \circ f(u) = w$$

on a $g(f(u)) = w$

Posant $v = f(u) \in F$, on a $g(v) = w$.

Donc g est surjective de F dans G .

* Pas forcément f .

Ex: $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$
pas surjective

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^2$

$g \circ f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto (\sqrt{x})^2 = x$

surjective

Exercice 5

$$f: E \rightarrow F, \quad g: F \rightarrow E.$$

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & E & \xrightarrow{f} & F \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & & & f \circ g \circ f \end{array}$$

On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective, de E dans F .

+ Montrons que f est bijective de E dans F .

→ Injectivité : soient $u, u' \in E$ tels que $f(u) = f(u')$

$$\text{alors} \quad f \circ g(f(u)) = f \circ g(f(u'))$$

$$\text{donc} \quad f \circ g \circ f(u) = f \circ g \circ f(u')$$

$$\text{donc} \quad u = u' \quad \text{car} \quad f \circ g \circ f \text{ est injective}$$

ainsi f est injective.

→ Surjectivité : soit $v \in F$.

Par surjectivité de $f \circ g \circ f$, il existe $u \in E$ tel

$$\text{que} \quad v = f \circ g \circ f(u) = f(g \circ f(u))$$

$$\text{En posant} \quad u' = g \circ f(u) \in E \quad \text{on a} \quad v = f(u')$$

donc f est surjective

→ ainsi f est bijective de E dans F . Soit $f^{-1}: F \rightarrow E$

son application réciproque

$$* \quad \text{Notons} \quad h = f \circ g \circ f.$$

$$\text{alors} \quad f^{-1} \circ h \circ f^{-1} = \underbrace{f^{-1} \circ f}_{\text{id}_E} \circ g \circ \underbrace{f \circ f^{-1}}_{\text{id}_F}$$

$$= \text{id}_E \circ g \circ \text{id}_F$$

$$= g$$

Donc g est composée d'applications bijectives.

D'après le cours, elle est bijective.