TD – AL3

Ensembles

Applications directes du cours

ADC 1 Donner $\mathcal{P}(\{2,4,6\})$.

ADC 2 Montrer, par double-inclusion, que $A = B$ avec

$$A = \{(a-b, b, -2a+3b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{et} \quad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$$

ADC 3 Soient $A =]-\infty, 3[$ et $B = [0,5]$, parties de $\mathbb{R}$.
Donner $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

ADC 4

1. Combien existe-t-il de nombres à six chiffres ne contenant pas le chiffre 0 ?
2. Combien existe-t-il de nombres à six chiffres dont les chiffres sont non nuls et deux à deux distincts ?
3. Combien existe-t-il de nombres à six chiffres ?

ADC 5 Écrire la formule donnant $(a+b)^6$.

ADC 6 Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

Exercices

Exercice 1 Soient $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = 0\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$. Déterminer $E \cap F$.

Exercice 2

1. Montrer que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
2. En déduire la valeur de $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 Une urne contient 5 boules blanches numérotées 1 à 5 et 8 boules noires numérotées 6 à 13. On tire successivement et avec remise 4 boules dans l'urne. Quel est le nombre de tirages contenant au moins une boule blanche ?

Exercice 4 On dispose d'un jeu de 32 cartes et on appelle main tout ensemble de 5 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains donnant exactement un roi ?
3. Combien y a-t-il de mains donnant au plus un roi ?
4. Combien y a-t-il de mains où toutes les cartes sont des coeurs ?

Exercice 5 Une anagramme du mot THÉORÈME est un mot (n'ayant pas forcément de sens français) contenant les même lettres que THÉORÈME et en même nombre. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot THÉORÈME ...

1. ... en distinguant É, È et E ?
2. ... en omettant les accents ?

Exercice 6 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice N telle que $M = A + 2I_3$.
2. Déterminer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. En utilisant la formule du binôme, déterminer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

Pour aller plus loin

Exercice 7 Montrer que

$$\left\{(1 + a - b, 4 + 5a - 3b, 1 + a),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + 2z = 1\right\}.$$

Exercice 8 Déterminer

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 2\right\} \cap \left\{(a + b, 2b, 2a - 3b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 9 Calculer les puissances de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en utilisant la formule du binôme.

Exercice 10 On pioche 5 cartes dans un paquet de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains ayant au plus 2 rois ?