TD AL3 - Corrigé des DAPL

Exercice 7

Soient $A = \left\{ (1+a-b\ ,\ 4+5a-3b\ ,\ 1+a)\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ← forme paramétrique

$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ 3x - y + 2z = 1 \right\}$ ← équation

A et B sont des parties de $\mathbb{R}^3$.

* <u>Montrons que $A \subset B$</u>

Soit $u \in A$. On a $u = (1+a-b\ ,\ 4+5a-3b\ ,\ 1+a)$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ avec $\begin{cases} x = 1+a-b \\ y = 4+5a-3b \\ z = 1+a \end{cases}$

et
$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 3(1+a-b) - (4+5a-3b) + 2(1+a) \\ &= 3 + \cancel{3a} - \cancel{3b} - 4 - \cancel{5a} + \cancel{3b} + 2 + \cancel{2a} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $u \in B$

Ainsi <u>$A \subset B$</u>

* <u>Montrons que $B \subset A$</u>

Soit $u \in B$. On a $u = (x,y,z)$ avec $3x - y + 2z = 1$.

On cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (1+a-b\ ,\ 4+5a-3b\ ,\ 1+a)$.

$$(1+a-b\ ,\ 4+5a-3b\ ,\ 1+a) = u \iff \begin{cases} 1+a-b = x \\ 4+5a-3b = y \\ 1+a = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a-b = x-1 \\ 5a - 3b = y-4 \\ a = z-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -b = x-z \\ -3b = y-5z+1 \\ a = z-1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 5L_1 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b = -x + z \\ -3(-x+z) = y - 5z + 1 \\ a = z - 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b = -x + z \\ 3x - y + 2z = 1 \leftarrow \text{vrai car } u \in B \\ a = z - 1 \end{cases}$$

Ainsi $\begin{cases} a = z - 1 \\ b = -x + z \end{cases}$ conviennent. On a bien $u \in A$.

Donc $\underline{B \subset A}$

<u>Conclusion</u> : Par double-inclusion, $\underline{A = B}$

Exercice 8

Notons $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 2\}$

$B = \{(a+b, 2b, 2a-3b), (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

On cherche $A \cap B$.

* <u>Soit $u \in A \cap B$</u>.

On a $\to u \in A$, donc $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $2x + y - 2z = 2$

<u>et</u> $\to u \in B$, donc $u = (a+b, 2b, 2a-3b)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

On a donc

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = 2b \\ z = 2a - 3b \end{cases}$$

et $2x + y - 2z = 2$ donc $2(a+b) + 2b - (2a - 3b) = 2$

donc $7b = 2$

donc $b = \frac{2}{7}$

Ceci donne $x = a + b = a + \frac{2}{7}$

$y = \frac{4}{7}$

$z = 2a - 3b = 2a - \frac{6}{7}$

Donc $u = \left(a + \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, 2a - \frac{6}{7}\right)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Ainsi $u \in \left\{\left(a + \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, 2a - \frac{6}{7}\right), a \in \mathbb{R}\right\}$

Donc $A \cap B \subset \left\{\left(a + \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, 2a - \frac{6}{7}\right), a \in \mathbb{R}\right\}$

* <u>Montrons l'inclusion réciproque.</u>

Soit $u \in \left\{ \left(a + \frac{2}{7} , \frac{4}{7} , 2a - \frac{6}{7} \right), a \in \mathbb{R} \right\}$.

Alors u s'écrit $u = \left(a + \frac{2}{7} , \frac{4}{7} , 2a - \frac{6}{7} \right)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Montrons que $u \in A \cap B$, c'est-à-dire que $u \in A$ et que $u \in B$.

→ On a $u = (x, y, z)$ avec $\begin{cases} x = a + \frac{2}{7} \\ y = \frac{4}{7} \\ z = 2a - \frac{6}{7} \end{cases}$

et $2x + y - z = 2\left(a + \frac{2}{7} \right) + \frac{4}{7} - \left(2a - \frac{6}{7} \right)$

$= 2a + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - 2a + \frac{6}{7}$

$= \frac{14}{7} = 2$

Donc $u \in A$

→ On a aussi $u = \left(a + b, 2b , 2a - 3b \right)$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b = \frac{2}{7} \in \mathbb{R}$

donc $u \in B$.

Ainsi, $u \in A \cap B$ et on a bien

$\left\{ \left(a + \frac{2}{7} , \frac{4}{7} , 2a - \frac{6}{7} \right), a \in \mathbb{R} \right\} \subset A \cap B$.

<u>Conclusion</u> : Par double inclusion,

$A \cap B = \left\{ \left(a + \frac{2}{7} , \frac{4}{7} , 2a - \frac{6}{7} \right), a \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 9

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $M = A + B$ avec $B = -I_3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = (-I_3)^k = (-1)^k (I_3)^k = (-1)^k I_3$

* Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

  → $A^0 = I_3$

  → si $k \geq 1$, $A^k = 3^{k-1} A$ ← vu en cours. À refaire si c'est en devoir

* $AB = A(-I_3) = -AI_3 = -A$

  $BA = -I_3 A = -A$

  donc $AB = BA$

D'après la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$M^n = (A+B)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0} A^0 B^n}_{} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} A \times (-1)^{n-k} I_3$$

on met à part le terme $k=0$ car A^0 a une expression différente des autres A^k.

$$= I_3 \times (-1)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} (-1)^{n-k} \right) A$$

$$= (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} \right) A$$

$$= (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} - \binom{n}{0} 3^0 (-1)^n \right) A$$

$$= (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} \left((3 + (-1))^n - (-1)^n \right) A$$

$$M^n = (-1)^n I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} A$$

Exercice 10

. Rq : Une main est un ensemble de 5 cartes parmi les 52.
Il y en a $\binom{52}{5}$ au total.

. Notons A : " obtenir au plus deux rois ".
Il y a 4 rois en tout. Donc $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$
avec A_k : " obtenir exactement k rois ".
On a $\bar{A} = A_3 \cup A_4$ ← plus court.

$\boxed{A_3}$. Pour obtenir 3 rois exactement :
→ on pioche 3 rois parmi les 4 : $\binom{4}{3} = 4$ possibilités
→ puis on pioche 2 autres cartes parmi les 48 restantes : $\binom{48}{2}$ possibilités.

$\text{Card}(A_3) = 4 \times \binom{48}{2}$

$\boxed{A_4}$. Pour obtenir 4 rois :
→ on pioche les 4 rois : 1 possibilité
→ puis on pioche 1 autre carte : 48 possibilités.

$\text{Card}(A_4) = 48$.

Puisque A_3 et A_4 sont incompatibles : $\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(A_3) + \text{Card}(A_4)$
$= 4 \times \binom{48}{2} + 48$

Au final, $\text{Card}(A) = \binom{52}{5} - \left(4 \times \binom{48}{2} + 48\right)$.

2e méthode :

$\text{Card}(A) = \text{Card}(A_0) + \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2)$ ← à justifier.
$= \binom{48}{5} + 4 \times \binom{48}{4} + \binom{4}{2} \times \binom{48}{3}$

$= 2\,594\,400$.