TD AL3 - Exercices

Exercice 1

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in E \cap F \iff \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x + 2z \\ 3x + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x + 2z \\ x = -\frac{5}{3}z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -\frac{4}{3}z \\ x = -\frac{5}{3}z \end{cases}$$

$$\iff u = \left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right)$$

$$\iff u \in \left\{\left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right), \quad z \in \mathbb{R}\right\}$$

$$E \cap F = \left\{\left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right), \quad z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 2

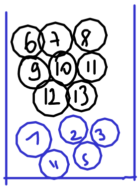
Soient $1 \leqslant k \leqslant n$, avec k, n des entiers.

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\
&= n \sum_{\substack{\ell=0 \\ (\ell=k-1)}}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \\
&= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} 1^{\ell} \times 1^{(n-1)-\ell} \\
&= n(1+1)^{n-1} && \text{par la formule du binôme} \\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}$$

Exercice 3

Soit A l'ensemble des tirages contenant au moins une boule noire. On cherche $\text{Card}(A)$.



* $\bar{A}$ est l'ensemble des tirages ne contenant aucune boule noire. Un tel tirage peut être modélisé par un élément de $[\![1, 5]\!]^4$. Donc $\text{Card}(\bar{A}) = 5^4$.

<u>Autre rédaction :</u> Pour obtenir un tirage de $\bar{A}$, on choisit successivement et avec remise 4 boules blanches. Pour chaque tirage, il y a 5 possibilités, donc au total, $\text{Card}(\bar{A}) = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$.

⚠ étapes successives : on <u>multiplie</u>

* Ainsi, $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\bar{A})$

où $\text{Card}(E)$ est le nombre total de tirages possibles.

Un tirage peut être modélisé par un élément de $[\![1, 13]\!]^4$ donc $\text{Card}(E) = 13^4$.

<u>Conclusion :</u> $\text{Card}(A) = 13^4 - 5^4$.

Exercice 4

1) Pour choisir une main, il faut piocher simultanément 5 cartes parmi les 32 cartes du paquet.

Il y a donc $\binom{32}{5}$ mains au total

2) Pour obtenir exactement un roi, on fait deux pioches :

→ une avec les rois (4 cartes)

→ une avec les autres cartes ($32-4=28$ cartes)

On va alors :

1) Piocher un roi : 4 possibilités

2) <u>puis</u>, piocher 4 cartes dans l'autre pioche ; il y a ici $\binom{28}{4}$ possibilités.

Au total, il y a $4 \times \binom{28}{4}$ mains contenant 1 roi.

3) Une main a au plus un roi si elle a 0 ou 1 roi.

→ Il y a $4 \times \binom{28}{4}$ mains avec 1 roi

→ Pour avoir 0 roi, on pioche 5 cartes dans la pioche des 28 cartes qui ne sont pas des rois.

Il y a $\binom{28}{5}$ telles mains.

Comme ces deux cas sont <u>disjoints</u>, il y a

$4\binom{28}{4} + \binom{28}{5}$ mains avec au plus un roi.

4) Pour avoir une main où toutes les cartes sont des coeurs, on fait une pioche avec uniquement les coeurs (8 cartes) et on y pioche 5 cartes. Il y a $\binom{8}{5}$ possibilités.

Exercice 5

1) Pour obtenir une anagramme de THÉORÈME, qui contient 8 lettres différentes :

- → on choisit la 1^{er} lettre : 8 possibilités
- → puis, la 2^e : 7 possibilités
- → etc
- → enfin, pour la dernière lettre, il n'y a qu'une seule possibilité.

Au total, il y a $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8$ anagrammes.

2) Cette fois, il y a trois lettres identiques.

Pour obtenir une anagramme, il faut placer les 8 lettres :

__ __ __ __ __ __ __ __

→ On commence par les trois E. Il s'agit de choisir 3 emplacements parmi les 8 : il y a $\binom{8}{3}$ possibilités.

Un exemple :

__ E E __ __ __ E __

→ puis on place les 5 autres lettres dans les emplacements libres en commençant à gauche.

- → 1^{er} emplacement libre : 5 possibilités
- → 2^e : 4 possibilités
- → 3^e : 3
- → 4^e : 2
- → 5^e : 1

Au total, il y a $\binom{8}{3} \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \binom{8}{3} \times 5!$ anagrammes.

Exercice 6

Écrivons $M = A + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $BA = (2I_3)A = 2A$ et $AB = A(2I_3) = 2(AI_3) = 2A$, donc $AB = BA$. On peut appliquer la formule du binôme de Newton.

Il va nous falloir les puissances de A et de B qui sont ici faciles à calculer.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = (2I_3)^k = 2^k(I_3)^k = 2^k I_3$.

Il reste les puissances de A. Calculons les premières.

$A^0 = I_3$, $A^1 = A$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc pour tout $k \geqslant 3$, $A^k = 0_3$.

D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} M^n &= (A+B)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} A^0 B^n + \binom{n}{1} A^1 B^{n-1} + \binom{n}{2} A^2 B^{n-2} + \underbrace{\binom{n}{3} A^3 B^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n} A^n B^0}_{=0_3} \\ &= \binom{n}{0} A^0 B^n + \binom{n}{1} A^1 B^{n-1} + \binom{n}{2} A^2 B^{n-2} \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Remarque : $\binom{n}{2} = 0$ si $n \leqslant 2$ et sinon, $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Cette dernière formule, sans les factoriels, est valable également si $n = 0$ ou $n = 1$. Comme ici, n peut valoir 0 ou 1, on utilisera cette formule.

$$\begin{aligned} M^n &= I_3(2^n I_3) + nA(2^{n-1}I_3) + \frac{n(n-1)}{2} A^2(2^{n-2}I_3) \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1}nA + 2^{n-3}n(n-1)A^2 \\ &= 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2^{n-1}n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^{n-3}n(n-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 3 \times 2^{n-1}n + 2^{n-3}n(n-1) \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-3}n(n+11) \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$