TD AL4 : ADC

ADC 1

$\mathcal{P}(\{2,4,6\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{2,4,6\}\}$

ADC 2

* Montrons $A \subset B$

Soit $u = (a-b, b, -2a+3b) \in A$

$u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $\begin{cases} x = a-b \\ y = b \\ z = -2a+3b \end{cases}$

$$2x - y + z = 2(a-b) - b + (-2a+3b)$$
$$= 0$$

Donc $u \in B$. Ainsi $A \subset B$

* Montrons $B \subset A$

Soit $u \in B$. $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $2x - y + z = 0$. (*)

On cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$u = (a-b, b, -2a+3b).$$

$u = (a-b, b, -2a+3b) \iff \begin{cases} x = a-b \\ y = b \\ z = -2a+3b \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = a-y \\ b = y \\ z = -2a+3y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = x+y \\ b = y \\ z = -2x+y \end{cases}$ ← vrai d'après (*)

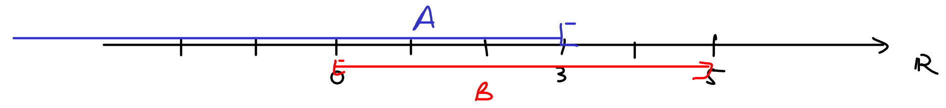
Avec $a = x+y$ et $b = y$, on a bien $u = (a-b, b, -2a+3b)$. Donc $u \in A$

Ainsi $B \subset A$.

* Conclusion : Par double inclusion, $A = B$.

ADC 3

$A =]-\infty, 3[$, $B = [0, 5]$



$A \cup B =]-\infty, 5]$, $A \cap B = [0, 3[$, $A \setminus B =]-\infty, 0[$

$B \setminus A = [3, 5]$; $\overline{A} = [3, +\infty[$, $\overline{B} =]-\infty, 0[\cup]5, +\infty[$.

ADC 4

1) Un nombre à 6 chiffres ne contenant pas le chiffre 0 peut être modélisé par un élément de $[\![1, 9]\!]^6$. Ex 123 456 → (1,2,3,4,5,6).

Or $\mathrm{Card}([\![1,9]\!]^6) = \mathrm{Card}([\![1,9]\!])^6 = 9^6$.

Il y a donc 9^6 tels nombres.

2) Pour obtenir un nombre à 6 chiffres deux à deux distincts sans 0 :

→ on choisit le 1er chiffre : 9 possibilités
→ on choisit le 2e chiffre : 8 possibilités
→ etc
→ on choisit le 6e chiffre : 4 possibilités.

Au total, il y a $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ tels nombres.

3) <u>Méthode 1</u> : Un nombre à 6 chiffre est un élément de $[\![100\,000, 999\,999]\!]$. Il y a

$999\,999 - 100\,000 + 1 = 900\,000$ tels nombres.

<u>Méthode 2</u> (version longue) :
Pour choisir un nombre à 6 chiffres :

→ on choisit le 1er chiffre (celui le plus à gauche), qui doit être non nul : il y a 9 possibilités

→ puis on choisit le 2e chiffre entre 0 et 9 : 10 possibilités
→ puis on choisit le 3e chiffre : 10 possibilités
→ etc, jusqu'au 6e chiffre : 10 possibilités à chaque fois.

5 chiffres à choisir ici

Au total, il y a 9×10^5 possibilités

ADC 5

$$(a+b)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} a^k \, b^{6-k}$$

$$= \binom{6}{0} a^0 \, b^6 + \binom{6}{1} a^1 \, b^5 + \binom{6}{2} a^2 b^4 + \binom{6}{3} a^3 \, b^3$$

$$+ \binom{6}{4} a^4 \, b^2 + \binom{6}{5} a^5 \, b + \binom{6}{6} a^6 \, b^0 .$$

Or ,

$\binom{n}{k}$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

Donc

$$(a+b)^6 = b^6 + 6\,a\,b^5 + 15\,a^2\,b^4 + 20\,a^3\,b^3 + 15\,a^4\,b^2 + 6\,a^5\,b + a^6$$

ADC 6

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \, 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$$

d'après la formule du binôme de Newton.