

TD – AL2

CALCUL MATRICIEL

Applications directes du cours

ADC 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $3A - B$; $2I_2 + A$; $3(A - 2B)$.

ADC 2 Effectuer tous les produits possibles avec deux des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ADC 3 Donner tA , tC et tX .

ADC 4 Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, avec $m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } i+j \text{ est impair} \end{cases}$.

Écrire la matrice M . Calculer M^2 , M^3 .

Conjecturer la forme de M^n puis démontrer le résultat par récurrence.

ADC 5 Les matrices suivantes sont-elles inversibles? Si oui, donner leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ADC 6 Pour chacune des matrices suivantes, montrer que A est inversible et calculer son inverse.

$$(a) A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $AA^{-1} = I_3$.

ADC 7 En utilisant l'ADC6, montrer que le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ x + 2z = -1 \end{cases}$ admet une unique solution puis donner celle-ci.

Exercices

Exercice 1 Soient A et X deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$.

1. Montrer que la matrice tAA est symétrique.
2. Montrer que si X est symétrique, ${}^tAX + XA$ est symétrique.
3. Montrer que si X est antisymétrique, ${}^tAX + XA$ est antisymétrique.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On considère deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 1 + a_n \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer l'expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k)$ puis en déduire l'expression de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Donner alors l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 Polynôme annulateur

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que $A^3 - A^2 + 2A + 11I_3 = 0_3$.
- (b) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice carrée définie par $a_{i,i} = 0$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$.

- (a) Quelle est la matrice $A + I_4$? Calculer alors $(A + I_4)^2$.
- (b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 6A$. En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 5 Diagonalisation

Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. Déterminer D^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 Utilisation de la formule du binôme de Newton

Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En remarquant que $M = N + 2I_3$, calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour aller plus loin

Exercice 7 Déterminer les puissances de $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des 2 sur la diagonale et des 1 partout ailleurs. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 Soit $A_x = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 2 & 2 & 3-x \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quels x la matrice A_x est inversible.