TD – AL2

Calcul matriciel

Applications directes du cours

ADC 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $3A - B$; $2I_2 + A$; $3(A - 2B)$.

ADC 2 Effectuer tous les produits possibles avec deux des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ADC 3 Donner ${}^tA$, ${}^tC$ et ${}^tX$.

ADC 4 Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, avec $m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } i+j \text{ est impair} \end{cases}$.

Écrire la matrice M. Calculer M^2, M^3.
Conjecturer la forme de M^n puis démontrer le résultat par récurrence.

ADC 5 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donner leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ADC 6 Pour chacune des matrices suivantes, montrer que A et inversible et calculer son inverse.

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $AA^{-1} = I_3$.

ADC 7 En utilisant l'ADC6, montrer que le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ x + 2z = -1 \end{cases}$ admet une unique solution puis donner celle-ci.

Exercices

Exercice 1 Soient A et X deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$.

1. Montrer que la matrice ${}^tAA$ est symétrique.
2. Montrer que si X est symétrique, ${}^tAX + XA$ est symétrique.
3. Montrer que si X est antisymétrique, ${}^tAX + XA$ est antisymétrique.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On donnera des relations de récurrence définissant les suites (a_n) et (b_n).
2. Déterminer l'expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)$ puis en déduire l'expression de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Donner alors l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 **Polynôme annulateur**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $A^3 - A^2 + 2A + 11I_3 = 0_3$.
   (b) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice carrée définie par $a_{i,i} = 0$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$.
   (a) Quelle est la matrice $A + I_4$? Calculer alors $(A + I_4)^2$.
   (b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 6A$. En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 5 **Diagonalisation**

Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. Déterminer D^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.