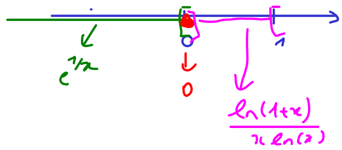
Interrogation du 31/01/2022

NOM Prénom : **/10**

1. Donner la définition de « f est continue en a ». /1

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a) .$$

2. Soit $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x\ln(x)} & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$ /5



Étudier la continuité de f sur $]-\infty, 1[$.

* sur $]-\infty, 0[$, $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

 $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et exp est continue sur $\mathbb{R}$.

1 Par composée, f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$.

* sur $]0,1[$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x\ln(x)} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$.

 . $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0,1[$.

 . ln est continue sur $]0,+\infty[$ et ne s'annule pas sur $]0,1[$.

 . $x \mapsto 1+x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0,1[$ et

1,5 pour $x \in]0,1[$, $1+x > 0$ donc $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $]0,1[$.

 Par produit et quotient, f est continue sur $]0,1[$.

* En 0

 → si $x < 0$, $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

 $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{u \to -\infty} \exp(u) = 0$ donc

1 $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$

 → si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \times \dfrac{1}{\ln(x)}$

 or $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ par taux d'accroissement usuel

1 et $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \times 0 = 0 = f(0)$

0,5 Ainsi f est continue en 0.

Tournez la page →

* Conclusion : f est continue sur $]-\infty, 1[$

3. Montrer que l'équation $\ln(x) - x = -2$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$. **/4**

Soit $f : x \mapsto \ln(x) - x$.

- Par différence, f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ donc sur $[1, +\infty[$.

1

- Pour $x \geqslant 1$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \leqslant 0$ car $1-x \leqslant 0$, $x > 0$

De plus, $f'(x) = 0 \Leftarrow x = 1$: il y a un nombre fini de solutions.

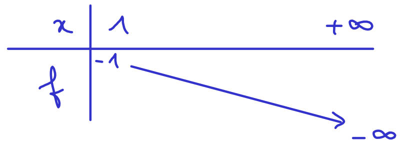
Ainsi f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

- $f(1) = \ln(1) - 1 = -1$

1

Pour $x > 0$, $f(x) = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée.



On a :

- $[1, +\infty[$ est un intervalle
- f est continue sur $[1, +\infty[$
- f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$
- $-2 \in]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(1)] =]-\infty, -1]$

1,5

D'après le théorème de la bijection, $f(x) = -2$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$. 0,5