Interrogation du 24/01/2022

NOM Prénom :	**/10**

1. Soit $f\colon E \to F$ une application. Compléter : **/1**

L'ensemble image de f est $\Big\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \Big\}$.

2. Soit $f\colon E \to F$ une application. f est dite **injective** si : (une définition à donner, au choix) **/1**

3. Soit $f\colon E \to F$ une application. f est dite **surjective** si : (une définition à donner, au choix) **/1**

4. Soit $f\colon E \to F$ une application. f est dite **bijective** si : (une définition au choix) **/1**

5. Soit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $g(x,y) = (x+2y, 3x+5y)$. Montrer que g est bijective et donner son application réciproque. **/3**

Soient $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$g(u) = v \iff \begin{cases} x + 2y = a \\ 3x + 5y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = a \\ -y = b - 3a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -5a + 2b \\ y = 3a - b \end{cases}$$

$$\iff u = (2b - 5a, \ 3a - b)$$

Donc, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $g(u) = v$ admet une unique solution $u \in \mathbb{R}^2$.

Ainsi g est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et

$$g^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ v = (a,b) & \longmapsto & (2b - 5a, \ 3a - b) \end{array}$$

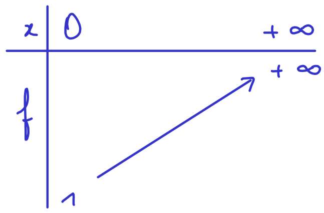
Tournez la page ➔

6. Soit $f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x + x^2 \end{array}$. **/3**

1. Montrer que f est injective de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
2. Est-elle surjective de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$?

1) f est dérivable sur $[0,+\infty[$ par somme.
Pour $x \geq 0$, $f'(x) = e^x + 2x > 0$ car $e^x > 0$, $2x \geq 0$.
Donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
Ainsi f est injective de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par somme.
On a :



Argument 1 : L'ensemble image est $f(\mathbb{R}_+) = [1,+\infty[$
$= \mathbb{R}$
donc f n'est pas surjective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

Argument 2 : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq 1$.
Donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution $x \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi f n'est pas surjective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.