Interrogation du 03/01/2022

NOM Prénom :	**/10**

1. Donner la définition de $\mathbb{R}_n[X]$. **/1**

$$\mathbb{R}_n[X] = \{ P(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(P(x)) \leq n \}$$

2. Trouver les polynômes $P(X)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(0) = 1$ et $P(1) = P(2) = 2$ **/3**

On a $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} P(0) = 1 \\ P(1) = 2 \\ P(2) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ a+b+c = 2 \\ 4a+2b+c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ a+b = 1 \\ 4a+2b = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = 1 \\ a+b = 1 \\ -2b = -3 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$\iff \begin{cases} c = 1 \\ a = -1/2 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\iff \boxed{P(X) = -\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1}$$

Dans toute la suite, on pose $\boxed{P(X) = 2X^4 + 9X^3 + 9X^2 - X - 3}$.

3. Quel est le degré de P ? **/1**

$\deg(P(X)) = 4$.

4. Montrer que -1 est racine de $P(X)$. **/1**

$$P(-1) = 2\times(-1)^4 + 9\times(-1)^3 + 9\times(-1)^2 - (-1) - 3$$
$$= 2 - 9 + 9 + 1 - 3$$
$$= 0$$

Donc -1 est racine de $P(X)$

5. Montrer que $(X+1)^2$ divise $P(X)$. **/2**

$(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3 & x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2} -(2x^4 + 4x^3 + 2x^2) & 2x^2 + 5x - 3 \\ \hline 5x^3 + 7x^2 - x - 3 & \\ -(5x^3 + 10x^2 + 5x) & \\ \hline -3x^2 - 6x - 3 & \\ -(-3x^2 - 6x - 3) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Le reste est nul donc $\underline{(X+1)^2 \text{ divise } P(X)}$

6. Factoriser P (au maximum). **/2**

D'après 5), $P(X) = (X+1)^2(2x^2 + 5x - 3)$

$\Delta(2x^2 + 5x - 3) = 5^2 - 4\times 2\times(-3) = 25 + 24 = 49 = 7^2 > 0$.

Donc $2x^2 + 5x - 3$ a deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-5-7}{4} = -3$

$x_2 = \dfrac{-5+7}{4} = \dfrac{1}{2}$

Donc $2x^2 + 5x - 3 = 2(X+3)(X-\frac{1}{2})$

et $\boxed{P(X) = 2(X+3)(X-\tfrac{1}{2})(X+1)^2}$