Interrogation du 22/11/2021

NOM Prénom :	**/10**

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Dire si les produits suivants existent ou non puis réaliser les produits possibles. **/3**

AB : oui - non ; BA : oui - non ; AX : oui - non ; XA : oui - non ; BX : oui - non ; XB : oui - non

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -9 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2. Donner la transposée de A. **/1**

$${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. La matrice B est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse. **/2**

$\det(B) = 2 \times (-2) - 1 \times 3 = -7 \neq 0$

donc B est inversible et $B^{-1} = \dfrac{1}{-7}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Tournez la page ➔

4. La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse. **/1**

M est diagonale et un de ses coefficients diagonaux est nul donc elle n'est pas inversible.

Soit $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Montrer que $2P - P^2 - I_3 = 0_3$ **/1**

$$P^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

donc

$$2P - P^2 - I_3 = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -4 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0_3$$

6. En déduire que P est inversible et donner son inverse. **/2**

On a $2P - P^2 = I_3$

donc $P(2I_3 - P) = I_3$

Notons $Q = 2I_3 - P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

On a $PQ = I_3$ donc d'après le cours, P est inversible et $P^{-1} = Q$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$