Méthodes

CALCULS ET INÉGALITÉS

I Connaître les règles de calcul

I.1 Développer, factoriser

Proposition

Soient a, b deux réels.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Exercices

1. Développer $(a+b)^3$.
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$
2. Factoriser $1 - 4x^2$.
$$1 - 4x^2 = 1^2 - (2x)^2 = (1-2x)(1+2x).$$
3. Factoriser $x - 4x^2$.
$$x - 4x^2 = x(1-4x).$$
4. Mettre en facteur x dans l'expression $2x^2 + 3x - 1$.
$$2x^2 + 3x - 1 = x\left(2x + 3 - \frac{1}{x}\right)$$

I.2 Fractions

Proposition

Soient a, b, c, d des réels non nuls.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}, \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Attention à bien aligner les fractions quand il y en a plusieurs.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \neq \frac{a}{\frac{b}{\frac{c}{d}}}.$$

En effet,

$$\frac{a}{\frac{b}{c/d}} = \frac{a}{b \times \frac{d}{c}} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Proposition : Simplication

$$\frac{a \times b}{a \times c} = \frac{b}{c}$$

Pas d'autre simplication possible.

Exercice

1. Calculer $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$.
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2}{6}-\frac{3}{6}=-\frac{1}{6}.$$

2. Calculer $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$.
$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}.$$

3. Calculer $\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$.
$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{3\times 5}{4\times 2\times 3}=\frac{5}{8}.$$

4. Calculer $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$
$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3\times 6}{4\times 5}=\frac{3\times 3\times 2}{2\times 2\times 5}=\frac{9}{10}.$$

I.3 Puissances

Proposition

Soient a, b des réels non nuls et n, m des entiers.

$$a^n\times a^m=a^{n+m},\qquad (a^n)^m=a^{n\times m},\qquad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}=\frac{1}{a^{m-n}},\qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

$$(a\times b)^n=a^n\times b^n,\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Attention aux parenthèses : $\frac{a^n}{b}\neq\left(\frac{a}{b}\right)^n$, $\quad a\times b^n\neq(a\times b)^n$.

Exercices

1. Calculer $\left(\frac{2(xy)^2}{y^3}\right)^4$.
$$\left(\frac{2(xy)^2}{y^3}\right)^4=\left(\frac{2x^2y^2}{y^3}\right)^4=\left(\frac{2x^2}{y}\right)^4=\frac{16x^8}{y^4}$$

2. Calculer $\left(\frac{1}{xy}\right)^2-\frac{3}{yx^4}$.
$$\left(\frac{1}{xy}\right)^2-\frac{3}{yx^4}=\frac{1}{x^2y^2}-\frac{3}{yx^4}=\frac{x^2}{x^4y^2}-\frac{3y}{y^2x^4}=\frac{x^2-3y}{x^4y^2}.$$

II Résoudre une équation

II.1 Premier degré

Proposition

Soient $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Pour tout réel x,

$$ax+b=0\Longleftrightarrow x=-\frac{b}{a}.$$

Exercice : résoudre $\frac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} = 0$.

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0 \iff x = -\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \iff x = -\frac{1}{4} \times 2 \iff x = -\frac{1}{2}$$

ou

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0 \iff 2x + 1 = 0 \quad (\times 4) \iff x = -\frac{1}{2}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

II.2 Factoriser

Proposition

Soient A et B deux expressions réelles.

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Exercice : résoudre $2x^2 = 3x$.
Soit x un réel.

$$2x^2 = 3x \iff 2x^2 - 3x = 0 \iff x(2x-3) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 2x - 3 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2}.$$

L'ensemble des solutions est $\left\{0, \dfrac{3}{2}\right\}$.

II.3 Second degré

Proposition : Équation $x^2 = a$

Soit a un réel.

- Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution réelle.
- Si $a = 0$: $x^2 = 0 \iff x = 0$.
- Si $a > 0$: $x^2 = a \iff x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

Proposition : Équation $ax^2 + bx + c = 0$

Soient a, b, c trois réels, $a \neq 0$.
On appelle *discriminant* de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ le réel

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une solution réelle :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.

Exercice : Résoudre l'équation $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x = 1$.

$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x = 1 \iff \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - 1 = 0 \iff 2x^2 + x - 6 = 0 \quad (\times 6)$$

Le discriminant est $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-6) = 49 > 0$. L'équation admet donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{49}}{4} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{49}}{4} = \frac{3}{2}.$$

II.4 Cas des quotients

Exercice : résoudre $\dfrac{2x-3}{x-1} = \dfrac{2-x}{x}$.

- Valeurs interdites :

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{et} \quad x = 0.$$

- Résolution : méthode 1, produit en croix
  Soit x un réel différent de 1 et 0.

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2-x}{x} &\Longleftrightarrow (2x-3)x = (2-x)(x-1) \\ &\Longleftrightarrow 2x^2 - 3x = 2x - 2 - x^+x \\ &\Longleftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \end{aligned}$$

  Le discriminant est $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 12 > 0$. L'équation $3x^2 - 6x + 2 = 0$ a donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{6-\sqrt{12}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6+\sqrt{12}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

  Ce ne sont pas des valeurs interdites donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \; ; \; 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

- Résolution : méthode 2
  Soit x un réel différent de 1 et 0.

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2-x}{x} &\Longleftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} - \frac{2-x}{x} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{x(2x-3) - (2-x)(x-1)}{x(x-1)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{3x^2 - 6x + 2}{x(x-1)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \end{aligned}$$

III Manipuler une inégalité

Proposition

Ajouter ou soustraire un nombre ne change pas le sens d'une inégalité :

$$b \leqslant c \Longleftrightarrow b + a \leqslant c + a$$

$$b < c \Longleftrightarrow b + a < c + a$$

Proposition

Soient a, b, c des réels.

- Si $a > 0$, **multiplier par** a ne change pas le sens d'une inégalité :

$$b \leqslant c \Longleftrightarrow ab \leqslant ac$$

$$b < c \Longleftrightarrow ab < ac$$

- Si $a < 0$, **multiplier par** a change le sens d'une inégalité :

$$b \leqslant c \Longleftrightarrow ab \geqslant ac$$

$$b < c \Longleftrightarrow ab > ac$$

Conséquence : ne jamais multiplier une inégalité par une quantité dont le signe est incertain ou variable.

Corollaire : Multiplication de deux inégalités de nombres positifs

Soient a, b, c, d des réels **positifs**.
Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bd$.

Démonstration. On a $a \leqslant b$ et comme $c \geqslant 0$, on obtient :

$$ac \leqslant bc.$$

Par ailleurs, $c \leqslant d$ et $b \geqslant 0$, donc

$$bc \leqslant bd.$$

Ainsi,

$$ac \leqslant bc \leqslant bd \text{ donc } ac \leqslant bd.$$

□

Attention, il n'y a pas équivalence ici. C'est un « si … alors ».
Attention : on ne divise jamais deux inégalités !

Proposition : Passage à l'inverse

Soient a, b des réels **non nuls et de même signe**.

- Si $0 < a < b$, alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} > 0$.
- Si $a < b < 0$, alors $0 > \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

Attention : ne fonctionne pas si a et b n'ont pas le même signe.
Par exemple $a = -2 < b = 1$, mais $\dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{b} = 1$.

Exercice : montrer que pour $x > 1$, on a : $\dfrac{4}{x} > \dfrac{2}{x^2}$.

- Méthode 1 : Soit $x > 1$. Comme $x > 0$, on peut multiplier par x :

$$x^2 > x > 0.$$

Par passage à l'inverse,

$$0 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}.$$

De plus, $0 < 2 < 4$. Par multiplication des deux inégalités de nombres positifs :

$$0 < \frac{2}{x^2} < \frac{4}{x}.$$

- Méthode 2 : étudions le signe de $\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}$.

$$\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{4x-2}{x^2}.$$

Or, $x^2 > 0$ et puisque $x > 1$, $4x > 4$ puis $4x - 2 > 2 > 0$. Ainsi,

$$\frac{4x-2}{x^2} > 0.$$

On en déduit que $\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} > 0$ et donc que

$$\frac{4}{x} > \frac{2}{x^2}.$$

IV Résoudre une inéquation

IV.1 Premier degré

Pour résoudre une inéquation du premier degré, on isole x en suivant les règles précédentes.
Exercice : résoudre $5 - 3x > 0$.

$$\begin{aligned} 5 - 3x > 0 &\iff -3x > -5 && +(-5) \\ &\iff x < -5 \times \left(-\frac{1}{3}\right) && \times \left(-\frac{1}{3}\right) < 0 \\ &\iff x < \frac{5}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\left]-\infty, \frac{5}{3}\right[$.
ou alors :

$$\begin{aligned} 5 - 3x > 0 &\iff 5 > 3x && +3x \\ &\iff \frac{5}{3} > x && \times\frac{1}{3} > 0 \end{aligned}$$

Tableau de signe de $ax + b$ à connaître :

Cas où $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Cas où $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

IV.2 Second degré

Tableau de signe de ax^2+bx+c à connaître.

$\Delta > 0$, $a > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Delta > 0$, $a < 0$:

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\Delta = 0$, $a > 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		$+$	0	$+$	

$\Delta = 0$, $a < 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		$-$	0	$-$	

$\Delta < 0$, $a > 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		$+$	

$\Delta < 0$, $a < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		$-$	

IV.3 Tableau de signe

Dans le cadre général, pour résoudre une inéquation :

- On cherche les éventuelles valeurs interdites ;
- on passe tout à gauche ;
- on factorise au maximum, regroupe sous une seule fraction (pour les quotients) ;
- on dresse le tableau de signe du produit / quotient ;
- on conclut.

Exercice : résoudre l'inéquation $\dfrac{2x-1}{2-x} \leqslant x$.

- Valeurs interdites : $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$.
- Soit x un réel différent de 2.

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{2-x} \leqslant x &\iff \frac{2x-1}{2-x} - x \leqslant 0 \\ &\iff \frac{2x-1-x(2-x)}{2-x} \leqslant 0 \\ &\iff \frac{x^2-1}{2-x} \leqslant 0 \end{aligned}$$

- Tableau de signe.

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-1.$$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x^2-1}{2-x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

- Conclusion : l'ensemble des solutions est : $[-1,1]\cup]2,+\infty[$.