Programme de colle S7

17 au 21 octobre 2022

La colle débutera par une question de cours (voir à la fin du programme).

AN3 Suites réelles

1. **Raisonnement par récurrence** (simple, double)
2. **Notion de suite**
   - ▷ Définition. Représentation graphique. Monotonie, suite majorée/minorée/bornée.
3. **Exemples classiques**
   - ▷ Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.
   - ▷ Suites récurrentes linéaires d'ordre deux : détermination du terme général **uniquement dans le cas où $\Delta \geqslant 0$.**
4. **Limite éventuelle d'une suite**
   - ▷ Notion de convergence, de suite tendant vers $\pm\infty$.
     La connaissance des définitions rigoureuses (« $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \dots$ ») n'est pas attendue des étudiants.
     Unicité de la limite.
   - ▷ Limites usuelles :
     - Pour $a > 0$ (constante), $\lim\limits_{n \to +\infty} n^a = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$;
     - Pour $a < 0$ (constante), $\lim\limits_{n \to +\infty} n^a = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^a} = +\infty$;
     - $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$;
     - $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$;
     - $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

     Soit $q \in \mathbb{R}$. On considère la suite géométrique $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
     - Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$;
     - Si $q = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$;
     - Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$;
     - Si $q \leqslant -1$, la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
   - ▷ Croissances comparées : pour $a > 0$ et $b > 0$ des constantes

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^b}{(\ln(x))^a} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0} x^b \lvert\ln(x)\rvert^a = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^b}{\exp(ax)} = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^b \exp(ax) = 0$

Si $q > 1$ et $a > 0$ sont des constantes,

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{q^n}{n^a} = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^a}{q^n} = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{q^n}{(\ln(n))^a} = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln(n))^a}{q^n} = 0$

Si $-1 < q < 1$ et $a > 0$ sont des constantes,

$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n \times n^a = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n \times (\ln(n))^a = 0$

- ▷ Calcul de la limite d'une suite par opérations.

5. Théorèmes sur les limites.

- Passage à la limite dans une inégalité.
- Exemples de suites extraites : (u_{n+1}), (u_{n+2}), (u_{2n}), (u_{2n+1}).
  Si (u_n) admet une limite, alors ces suites ont également cette même limite.
  Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite, alors (u_n) a également cette limite.
- Théorème d'existence de limite par encadrement, par majoration, par minoration.
- Théorème de la limite monotone. **Pas de borne inf/borne sup.**
- Suites adjacentes.

Méthodes du chapitre

- ▷ Rédiger un raisonnement par récurrence (simple ou double).
- ▷ Étudier la monotonie d'une suite.
- ▷ Reconnaître/déterminer le terme général d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique, d'une suite arithmético-géométrique ou d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux (avec $\Delta \geqslant 0$).
- ▷ Calculer la limite d'une suite **connaissant son terme général**, par opérations. Lever une forme indéterminée.
- ▷ Démontrer qu'une suite converge par application du théorème de la limite monotone.
- ▷ Suite récurrente d'ordre 1 dont on a prouvé la convergence : savoir calculer la limite en passant à la limite dans la relation de récurrence.
  Pour résumer : connaître les méthodes utilisées dans l'exercice 3 du TD.
- ▷ **Méthode plus difficile** : démontrer par l'absurde qu'une suite récurrente monotone tend vers $\pm\infty$.

Info boucles for et while

1. Déjà vu : print, numpy, numpy.random (fonction randint), instruction if.
2. Nouveau : range, boucles for et while

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours dans la liste ci-dessous :

- Toute définition, tout résultat et tout énoncé de théorème doit être connu et peut faire l'objet d'une question de cours.

- [Exemple du cours] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

- [Exemple du cours] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer par **récurrence double** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

- [Exemple du cours] Déterminer la limite de $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

- [Vu en informatique] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4n}$.
  Écrire un programme qui, étant donné un entier naturel n, calcule et affiche la valeur de u_n.
  À savoir faire sur pour toute suite récurrente d'ordre 1.

```
# n est supposé donné
import numpy as np
u = 0
for k in range(n):
    u = np.sqrt(u + 4*k)
print(u)
```

- [Vu en informatique] Déterminer le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n \geqslant 10000$ (avec une boucle while). *Idem, à savoir faire pour tout énoncé similaire.*

```
n = 0
while 2**n < 10000:
    n = n+1
print(n)

# ou alors, sans **

n = 0
p = 1 # 2**0
while p < 10000:
    p = p*2
    n = n+1
print(n)
```