Programme de colle S6

10 au 14 octobre 2022

La colle débutera par une question de cours (voir à la fin du programme).

AL1 Systèmes linéaires

1. **Généralités**
   - ▷ Définition d'un système linéaire, solution, système homogène.
   - ▷ Un système linéaire admet 0, 1 ou une infinité de solution.
2. **Algorithme du pivot de Gauss**
   - ▷ Opérations élémentaires : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$).
   - ▷ Exemples de résolutions de systèmes linéaires par pivot de Gauss.

Méthodes du chapitre

- ▷ Savoir résoudre un système linéaire (max 4 inconnues).
- ▷ Savoir écrire l'ensemble des solutions, notamment dans le cas où il y a une infinité de solutions.

AN3 Suites réelles (début)

1. **Raisonnement par récurrence** (simple, double)
2. **Notion de suite**
   - ▷ Définition. Représentation graphique. Monotonie, suite majorée/minorée/bornée.
3. **Exemples classiques**
   - ▷ Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.
   - ▷ Suites récurrentes linéaires d'ordre deux : détermination du terme général **uniquement dans le cas où $\Delta \geqslant 0$.**
4. **Limite éventuelle d'une suite**
   - ▷ Notion de convergence, de suite tendant vers $\pm\infty$.
     La connaissance des définitions rigoureuses (« $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \dots$ ») n'est pas attendue des étudiants.
     Unicité de la limite.
   - ▷ Limites usuelles :
     - Pour $a > 0$ (constante), $\lim\limits_{n \to +\infty} n^a = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$;
     - Pour $a < 0$ (constante), $\lim\limits_{n \to +\infty} n^a = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^a} = +\infty$;
     - $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$;
     - $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$;
     - $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

Soit $q \in \mathbb{R}$. On considère la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$;
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$;
- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$;
- Si $q \leqslant -1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

▷ Croissances comparées : pour $a > 0$ et $b > 0$ des constantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^b}{(\ln(x))^a} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0} x^b \lvert\ln(x)\rvert^a = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^b}{\exp(ax)} = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^b \exp(ax) = 0$

Si $q > 1$ et $a > 0$ sont des constantes,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^a} = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{q^n}{(\ln(n))^a} = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^a}{q^n} = 0$

Si $-1 < q < 1$ et $a > 0$ sont des constantes,

$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n \times n^a = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n \times (\ln(n))^a = 0$

▷ Calcul de la limite d'une suite par opérations.
Pas de théorème donnant l'existence d'une limite cette semaine.

Méthodes du chapitre

▷ Rédiger un raisonnement par récurrence (simple ou double).

▷ Étudier la monotonie d'une suite.

▷ Reconnaître/déterminer le terme général d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique, d'une suite arithmético-géométrique ou d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux (avec $\Delta \geqslant 0$).

▷ Calculer la limite d'une suite **connaissant son terme général**, par opérations. Lever une forme indéterminée.

Pas de limite monotone, théorème d'encadrement, etc.

Info Calculs, numpy et instruction if

1. Calculs simples en python : `+,-,*,/,**`
2. Définir une variable. Afficher une valeur avec `print`.
3. Charger la bibliothèque numpy (`import numpy as np`), fonctions usuelles : `np.exp, np.log, np.sqrt`
4. Bibliothèque numpy.random (`import numpy.random as rd`), fonctions `rd.random()` et `rd.randint(a,b)`
5. Instruction conditionnelle `if...elif...else`

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours dans la liste ci-dessous :

- Propriétés classiques des fonctions usuelles (ensemble de définition, de dérivabilité, variations, allure de la courbe, etc.).

- [Exemple du cours] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

- [Exemple du cours] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer par **récurrence double** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

- [Informatique] On considère la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leqslant 2 \\ \ln(x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

  Écrire un programme python qui, étant donné un réel x, affiche la valeur de $f(x)$. *L'expression de f, en deux morceaux, pourra être changée.*

```python
# x supposé donné
import numpy as np
if x <= 2:
    print(2*x-1)
else:
    print(np.log(x))
```

- [Informatique] Écrire un programme python qui, étant donnés trois réels $a \neq 0$, b et c, calcule et affiche les solutions réelles de $ax^2 + bx + c = 0$.

```python
# a,b,c supposé donnés
import numpy as np

Delta = b**2 - 4*a*c
if Delta > 0:
    x1 = (-b-np.sqrt(Delta))/(2*a)
    x2 = (-b+np.sqrt(Delta))/(2*a)
    print(x1,x2)
elif Delta == 0:
    x0 = -b/(2*a)
    print(x0)
else:
    print('Pas de solution')
```

- [Informatique] On considère une urne contenant 5 boules rouges et 7 boules jaunes. Écrire un programme python réalisant une simulation d'un tirage dans cette urne. *La composition de l'urne pourra être changée.*

```python
import numpy.random as rd
# on numérote les boules rouges 1 à 5 et les jaunes 6 à 12
alea = rd.randint(1,13) # entier aléatoire entre 1 et 12
if alea <= 5:
    print('Rouge')
else:
    print('Jaune')
```