

Programme de colle S21

6 au 10 mars 2023

PB2 Variables aléatoires réelles sur un univers fini

Prérequis : Chapitre PB1 et calculs de sommes (dont sommes usuelles).

1. Variable aléatoire réelle sur Ω , univers fini

- ▷ Définition de variable aléatoire. Ensemble $X(\Omega)$ (ensemble fini ici). Événements $[X = x]$, $[X \in I]$, $[X \leq x]$, etc. Système complet associé à une variable aléatoire.
- ▷ Loi de probabilité d'une variable aléatoire. Loi de $Y = g(X)$, où g est définie sur $X(\Omega)$.

2. Espérance, variance

- ▷ Définition de l'espérance : $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$. Théorème de transfert.
- ▷ Variance et écart-type d'une variable aléatoire.
Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
- ▷ $E(aX + b)$, $V(aX + b)$, $\sigma(aX + b)$.

3. Loïs usuelles

- ▷ Variable aléatoire certaine (constante).
- ▷ Loi uniforme sur $[[1, n]]$ ou sur $[[a, b]]$, espérance, variance. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.
- ▷ Loi de Bernoulli, espérance et variance. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
- ▷ Loi binomiale, espérance, variance. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Méthodes du chapitre

- ▷ Déterminer la loi d'une variable aléatoire. Prérequis : Chapitre PB1.
- ▷ Déterminer la loi de $Y = g(X)$ avec $g(x) = ax + b$ ou $g(x) = x^2$.
- ▷ Calculer l'espérance, la variance d'une variable aléatoire.
- ▷ Savoir reconnaître une loi classique et utiliser les résultats du cours.

AL5 Théorie des graphes

Prérequis : Calcul matriciel

1. Définitions

- ▷ Graphe non orienté : sommets, arêtes, ordre, sommets adjacents, degré d'un sommet $\deg(s)$.
- ▷ Graphe orienté : sommets, arcs, ordre, degré sortant $\deg^+(s)$, degré entrant $\deg^-(s)$, degré $\deg(s)$.
- ▷ Formule d'Euler (ou poignées de main).

2. Matrice d'adjacence

- ▷ Définition dans le cas non orienté et le cas orienté. Dans le cas non orienté, elle est symétrique.

3. Chaînes et chemins

- ▷ Vocabulaire dans le cas non orienté : chaîne, cycle, longueur
- ▷ Vocabulaire dans le cas orienté : chemin, circuit, longueur
- ▷ Graphe connexe
- ▷ Avec la matrice d'adjacence :
 - les coefficients de A^k correspondent au nombre de chaînes/chemins de longueur k du sommet i au sommet j ;
 - le graphe (d'ordre n) est connexe si et seulement si $I_n + A + \dots + A^{n-1}$ est à coefficients strictement positifs.
- ▷ Graphe eulérien, caractérisation avec le degré.

Méthodes du chapitre

- ▷ Déterminer le degré d'un sommet
- ▷ Donner la matrice d'adjacence d'un graphe.
- ▷ Démontrer la connexité d'un petit graphe, en citant un chemin/chaîne entre chaque paire de sommets.
- ▷ Trouver le nombre de chemins de longueur k entre deux sommets.
- ▷ Prouver la connexité ou non d'un graphe à l'aide de la matrice d'adjacence.
- ▷ Déterminer si un graphe est eulérien ou non.

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions dans la liste ci-dessous :

- Toute définition, tout résultat et tout énoncé de théorème doit être connu et peut faire l'objet d'une question de cours.
- [Exemple de cours] On considère une urne contenant 3 boules numérotées 1 à 3. On effectue une succession de 4 tirages avec remise. On note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k -ième tirage ($k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$) et on note X la variable aléatoire égale à 0 si on n'obtient pas de 1 et sinon, égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un 1. Déterminer la loi de N_k et de X . C'est le cas $n = 3$ de l'exemple 3.
- [Cours] Définition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Donner l'espérance et la variance et faire la démonstration de l'espérance.
- [Cours] Définition d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli. Donner l'espérance et la variance et démontrer ces deux valeurs.
- [Cours] Définition d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale avec modèle-type. Donner l'espérance et la variance (pas de démonstration demandée).
- [ADC2 - AL5] 20 personnes se réunissent et se serrent tous la main. Combien de poignées de mains ont été serrées ?