Programme de colle S18

30 janvier au 3 février 2023

La colle débutera par une question de cours (voir à la fin du programme).

AL4 Applications

1. **Généralités**
   - ▷ Application $f : E \to F$, image d'un élément de E, antécédents éventuels d'un élément de F.
   - ▷ Ensemble image, noté $f(E)$ (analyse) ou $\mathrm{Im}(f)$ (algèbre).
   - ▷ Composée de deux applications. Application identité.
2. **Injections, surjections, bijections**
   - ▷ Définitions. Plusieurs formulations ont été données.
   - ▷ Application réciproque d'une bijection. Propriété de la réciproque.
   - ▷ Si $f : E \to F$ et $g : F \to E$ vérifient $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$.
   - ▷ Une fonction $f : I \to R$ strictement monotone sur l'intervalle I est injective de I dans $\mathbb{R}$.
   - ▷ Si f est injective sur E, alors elle l'est aussi sur $A \subset E$.

Méthodes du chapitre

- ▷ Déterminer l'image d'un élément.
- ▷ Déterminer l'ensemble des antécédents d'un élément.
- ▷ Ensemble image :
  - – Cas des fonctions : dresser le tableau de variation, puis donner (sans plus de justification) l'ensemble image par lecture du tableau.
  - – Exemples d'algèbre linéaire : l'ensemble image $\mathrm{Im}(f)$ sera donné. Il s'agit de le démontrer par double inclusion.
- ▷ Injectivité :
  - – Cas des fonctions : stricte monotonie à savoir démontrer.
  - – Cas général : $f(u) = f(u') \Leftrightarrow u = u'$
  - – Savoir aussi démontrer que f n'est pas injective avec un contre-exemple.
- ▷ Surjectivité :
  - – Pour tout $v \in F$, deviner un $u \in E$ tel que $f(u) = v$.
  - – Pour tout $v \in F$, résoudre l'équation $f(u) = v$ et montrer qu'elle a au moins une solution.
  - – Avec l'ensemble image.
  - – Savoir aussi justifier que f n'est pas surjective avec un contre-exemple.
- ▷ Bijectivité : démontrer que f est bijective de E dans F et déterminer son application réciproque, en résolvant $f(u) = v$.

AN7 Continuité

Prérequis : Études de fonctions - Limites

1. **Continuité**
   - ▷ Continuité en un point, sur un intervalle. Continuité à gauche, à droite.
   - ▷ Opérations sur les fonctions continues. Composition.
   - ▷ Prolongement par continuité en un point.
2. **Théorème des valeurs intermédiaires**
3. **Bijectivité**
   - ▷ Fonctions réalisant une bijection de I sur J : définition, représentation graphique de la réciproque.
   - ▷ Théorème de la bijection : Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur un intervalle J que l'on peut donner. La bijection réciproque associée est elle-même continue sur J et a le même sens de variation que f.
     Formulation avec le terme « équation ».
     Ce théorème donne et justifie la valeur de l'ensemble image $f(I)$.

Méthodes du chapitre

- ▷ **Étudier la continuité d'une fonction,** en particulier celles définies en plusieurs morceaux.
- ▷ Montrer qu'une fonction peut être prolongée par continuité en un point.
- ▷ Montrer qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J à déterminer.
- ▷ Dresser le tableau de variation de la réciproque associée.
- ▷ Montrer qu'une équation $f(x) = y$ (y constante donnée) admet une unique solution.

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours dans la liste ci-dessous :

- Toute définition, tout résultat et tout énoncé de théorème doit être connu et peut faire l'objet d'une question de cours. .
- [Exemple du cours] Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-z) \end{array}$ est surjective.
- [Exemple du cours] Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$ est bijective et déterminer son application réciproque.
- [Exemple du cours] Montrer que l'équation $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = 4$ admet une unique solution dans $]0,1]$.
  (On a fait l'étude de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, on peut raccourcir en ne faisant que l'étude sur $]0,1]$.)