Programme de colle S16

16 au 20 janvier 2023

La colle débutera par une question de cours (voir à la fin du programme).

PB1 Probabilités sur un univers fini

1. **Univers - Événements**
   - ▷ Univers Ω (fini non vide). Événements. Opérations, événements incompatibles.
   - ▷ Système complet d'événements : une famille finie d'événements $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet si elle vérifie les conditions deux suivantes :
     $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], \quad i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
2. **Notion de Probabilité**
   - ▷ Définition d'une probabilité : Une probabilité est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ et vérifiant $P(\Omega) = 1$ et $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (P est additive).
   - ▷ Propriétés : probabilité d'une union d'événements deux à deux incompatibles. Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complets d'événements, $\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$. Formules donnant : $P(\overline{A})$, $P(A \setminus B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cup B \cup C)$. Calcul de $P(A)$ comme somme des probabilités des événements élémentaires composant A.
   - ▷ Cas de l'équiprobabilité : probabilité uniforme.
3. **Probabilité conditionnelle**
   - ▷ Définition de $P_B(A)$
   - ▷ Formule des probabilités composées
   - ▷ Formule des probabilités totales
   - ▷ Formule de Bayes
4. **Indépendance**
   - ▷ Définition de l'indépendance de deux événements puis de l'indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.

AN6 Fonctions polynomiales

On confond polynôme et fonction polynomiale (notation $P(x)$).
Le but du chapitre est la factorisation dans $\mathbb{R}[x]$ des polynômes. On rappelle que les nombres complexes ne sont pas au programme.

1. **L'ensemble $\mathbb{R}[x]$**
   - ▷ Définition, les opérations sont celles des fonctions (combinaison linéaire, produit, puissance $n \in \mathbb{N}$, composée, dérivée).
   - ▷ Identification des coefficients.
2. **Degré d'un polynôme**
   - ▷ Définition, dégré d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'une composée, d'une dérivée.

- ▷ Ensemble $\mathbb{R}_n[x]$.

3. **Racines et factorisation**

   - ▷ Notion de diviseur. Pratique de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[x]$ (énoncé du théorème non exigible).
   - ▷ Racines d'un polynôme. $a \in \mathbb{R}$ est racine de P si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x-a$ divise $P(x)$. Un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ possède au plus n racines distinctes.
   - ▷ Exemples de factorisations de polynômes de degré $\geqslant 3$.
   - ▷ Polynômes du second degré : racines et factorisation (dans $\mathbb{R}$). Relation coefficients-racines.

   Notion de multiplicité hors programme.

Méthodes du chapitre

- ▷ Déterminer le degré d'un polynôme.
- ▷ Poser une division euclidienne.
- ▷ Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ ($n = 1, 2$ ou 3) vérifiant telles équations, en se ramenant à la résolution d'un système linéaire.
- ▷ Montrer que a est racine d'un polynôme donné.
- ▷ Factoriser un polynôme de degré 2, si possible.
- ▷ Factoriser un polynôme de degré $\geqslant 3$ donné en identifiant d'abord une racine ou un diviseur donné. Racines considérées comme évidentes : 0, 1, -1.
- ▷ Résoudre un système du type $\begin{cases} a+b = * \\ ab = * \end{cases}$ en remarquant que a et b sont les racines d'un certain polynôme du second degré.

Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours dans la liste ci-dessous :

- Toute définition, tout résultat et tout énoncé de théorème doit être connu et peut faire l'objet d'une question de cours.
  En particulier : énoncer le théorème des probabilités totales ou la formule des probabilités composées.
- [Exemple du cours] Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$ pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ à l'aide d'un polynôme.
- [Exemple du cours] Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$ deux polynômes vérifiant $P(0) = Q(0)$ et $P(1) = Q(1)$ et $P(2) = Q(2)$. Montrer que $P = Q$.
- [Exemple du cours] Factoriser au maximum $P : x \mapsto x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2$ dans $\mathbb{R}[x]$.