

## Programme de colle – semaine 19

21 au 25 février 2022

### AN5 Continuité

**Prérequis :** Études de fonctions - Limites

#### 1. Continuité

- ▷ Continuité en un point, sur un intervalle. Continuité à gauche, à droite.
- ▷ Opérations sur les fonctions continues. Composition.
- ▷ Prolongement par continuité en un point.

#### 2. Théorème des valeurs intermédiaires

#### 3. Bijectivité

- ▷ Fonctions réalisant une bijection de  $I$  sur  $J$  : définition, représentation graphique de la réciproque.
- ▷ Théorème de la bijection : Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  définit une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  que l'on peut donner. La bijection réciproque associée est elle-même continue sur  $J$  et a le même sens de variation que  $f$ .  
Formulation avec le terme « équation ».  
Ce théorème donne et justifie la valeur de l'ensemble image  $f(I)$ .
- ▷ Exemples d'études de suites implicites.

#### Méthodes du chapitre

- ▷ **Étudier la continuité d'une fonction**, en particulier celles définies en plusieurs morceaux.
- ▷ Montrer qu'une fonction peut être prolongée par continuité en un point.
- ▷ Montrer qu'une équation donnée  $f(x) = y$  admet une unique solution dans un intervalle  $I$ .
- ▷ Montrer qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle  $I$  sur un intervalle  $J$  à déterminer.
- ▷ Dresser le tableau de variation de la réciproque associée.

### AL6 Théorie des graphes

**Prérequis :** Calcul matriciel

#### 1. Définitions

- ▷ Graphe non orienté : sommets, arêtes, ordre, sommets adjacents, degré d'un sommet  $\deg(s)$ .
- ▷ Graphe orienté : sommets, arcs, ordre, degré sortant  $\deg^+(s)$ , degré entrant  $\deg^-(s)$ , degré  $\deg(s)$ .
- ▷ Formule d'Euler (ou poignées de main).

#### 2. Matrice d'adjacence

- ▷ Définition dans le cas non orienté et le cas orienté. Dans le cas non orienté, elle est symétrique.

### 3. Chaînes et chemins

- ▷ Vocabulaire dans le cas non orienté : chaîne, cycle, longueur
- ▷ Vocabulaire dans le cas orienté : chemin, circuit, longueur
- ▷ Graphe connexe
- ▷ Avec la matrice d'adjacence :
  - les coefficients de  $A^k$  correspondent au nombre de chaînes/chemins de longueur  $k$  du sommet  $i$  au sommet  $j$  ;
  - le graphe (d'ordre  $n$ ) est connexe si et seulement si  $I_n + A + \dots + A^{n-1}$  est à coefficients strictement positifs.
- ▷ Graphe eulérien, caractérisation avec le degré.

#### Méthodes du chapitre

- ▷ Déterminer le degré d'un sommet
- ▷ Donner la matrice d'adjacence d'un graphe.
- ▷ Démontrer la connexité d'un petit graphe, en citant un chemin/chaîne entre chaque paire de sommets.
- ▷ Trouver le nombre de chemins de longueur  $k$  entre deux sommets.
- ▷ Prouver la connexité ou non d'un graphe à l'aide de la matrice d'adjacence.
- ▷ Déterminer si un graphe est eulérien ou non.

### Questions de début de colle

La colle débutera par une ou plusieurs questions dans la liste ci-dessous :

- Énoncer une définition ou un résultat de cours.
- (Exercice de cours) Montrer qu'une fonction polynomiale de degré impair donnée (on donnera un exemple concret) s'annule sur  $\mathbb{R}$ .
- (Exercice – long – fait en cours) On note  $f : x \mapsto x e^x$ .
  1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $x e^x = \frac{1}{n}$  admet une unique solution  $u_n$  dans  $[-1, +\infty[$ .
  2. Comparer  $f(u_n)$  et  $f(u_{n+1})$ . En déduire que  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante.
  3. Montrer que  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge et calculer sa limite.
- (ADC2 - AL5) 20 personnes se réunissent et se serrent tous la main. Combien de poignées de mains ont été serrées ?